

# Skript - Elektrizitätslehre

Autor: Norbert Marxer

Erstellung: 14.01.2026 (Version 1)

## Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	1
Vorbemerkung	6
Übersicht	9
Lorentz-Kraft	$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ 21
Maxwell-Gleichungen	23
Einleitung	23
Maxwell-Gleichungen mit $\vec{E}$ und $\vec{B}$	23
Gauss' Gesetz	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Gauss' Gesetz für Magnetfelder	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
Gesetz von Faraday	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Gesetz von Ampère-Maxwell	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$
Maxwell-Gleichungen in Integralform	24
Einleitung	24
Gauss' Gesetz	$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{inside}}$ 25
Gauss' Gesetz für Magnetfelder	$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ 25
Gesetz von Faraday	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \phi_{B,S}$ 25
Gesetz von Ampère-Maxwell	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_S + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \phi_{E,S}$ 26
Maxwell-Gleichungen mit $\vec{E}$ , $\vec{D}$ , $\vec{B}$ und $\vec{H}$	26
Maxwell-Gleichungen	26
Polarisation	$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ 27
Magnetisierung	$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ 29
Folgerungen aus den Maxwell-Gleichungen	33
Einleitung	33
Coulomb-Kraft	$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2}$ 33
Vergleich Coulomb-Kraft/Gravitationskraft	34
Ladungserhaltung	$\frac{d}{dt} Q = -I_{\partial V, \text{out}}$ 34
Wellengleichung	$\Delta \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$ 34
Maxwell-Gleichung im Vakuum	34
Wellengleichung für das magnetische Feld	35
Wellengleichung für das elektrische Feld	35
Folgerung	35

Elektrostatik	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$	37
Einleitung			37
Elektrisches Feld um Ladungen			37
Elektrisches Feld um eine Punktladung			37
Elektrisches Feld bei einem Dipol			38
Elektrisches Feld bei mehreren Punktladungen			39
Elektrisches Potenzial ( $\phi$ ) und Poisson-Gleichung ( $\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ )			39
Definition der elektrischen Spannung ( $U$ )			40
Definition der Energieeinheit (eV)			40
Definition der Kapazität ( $C$ )			41
Definition des elektrischen Widerstandes ( $R$ )			42
Makroskopische Betrachtung (URI)			42
Mikroskopische Betrachtung ( $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ )			42
Supraleitung			42
Kraft, Arbeit, Energie und Leistung im elektrischen Feld (URI, PUI)			42
Kraft, Arbeit und Energie			42
Leistung (PUI)			43
 Magnetostatik	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$	 43
Einleitung			44
Vektorpotential			44
Magnetisches Feld um einen geraden Leiter			45
Biot-Savart Gesetz			45
Nord- und Südpol			46
Permamentmagnet			46
Definition			46
Stabmagnet			47
Magnetfeld der Erde			47
Elektromagnet			48
Definition der magnetischen Spannung ( $U_m$ )			49
Definition des magnetischen Flusses ( $\phi$ )			49
Kraft, Arbeit, Energie und Leistung im Magnetfeld			50
Lorentz-Kraft			50
Energiedichte des Magnetfeldes			49
Kreisbewegung einer Ladung im homogenen Magnetfeld			50
 Elektrodynamik			 51
Einleitung			51
Induktionsgesetz	Gleichung (3)'		51
Maxwell-Ampere Gesetz	Gleichung (4)'		52
Bemerkung zur vierten Maxwell-Gleichung			52
Physikalische Größen und deren Einheiten beim Elektromagnetismus			53

Elektrische Bauteile	54
Einleitung	54
Spannungs- und Stromquelle	54
Spannungsquelle	54
Stromquelle	55
Verbindung, Verzweigung und Schalter im Stromkreis	56
Verbindung	56
Verzweigung	57
Schalter	57
Ohm'scher Widerstand (URI und IGU)	57
Einleitung	57
Ohm'sche Widerstände	58
Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstands	58
Farbkodierung bei Ohm'schen Widerständen	58
Kondensator und Kondensatorgleichung ( $Q = C U$ )	60
Spule und Spulengleichung ( $\ddot{Q} = \frac{1}{L} U$ )	61
Stationärer Zustand	61
Spulengleichung	61
Wechselstromverhalten	62
Transformator	62
Stromkreise	64
Einleitung	64
Messung von Stromstärke und Spannung	64
Einleitung	64
Strommessung	64
Spannungsmessung	64
Kirchhoff'sche Gesetze	65
Kirchhoff'scher Maschensatz	65
Kirchhoff'scher Knotenpunktsatz	65
Gleichstromkreise	65
Ersatzwiderstände, Ersatzkapazität, Ersatzinduktivität	65
Widerstände in Serie und parallel	65
Kondensatoren in Serie und parallel	66
Spulen in Serie und parallel	67
Spannungsteiler	68
Ein- und Ausschaltvorgänge	69
R   Driftgeschwindigkeit	69
RC  Auf- und Abbau eines elektrischen Feldes	69
RL  Auf- und Abbau eines Magnetfelds	71
RLC Schwingkreise	72
Ungedämpfte Schwingung	72
Gedämpfte Schwingung	72
Angeregte Schwingung	72

Wechselstromkreis	74
Einleitung	74
Effektivwerte von Strom, Spannung und Leistung	74
Wechselstromwiderstand von $R$ , $L$ und $C$	75
Impedanzen	77
Zeigerdiagramme	77
Rechnen mit Zeigern	79
Elektrische Arbeit und Leistung beim Wechselstromkreis	81
Elektrische Maschinen	83
Generator	83
Erzeugung einer Wechselspannung	83
Drehstrom	83
Motor	84
Elektromagnetische Schwingungen und Wellen	85
Elektromagnetische Wellen	85
Elektromagnetisches Spektrum	85
<b>Anhang</b>	86
Anhang A Quellen	87
Übersicht über die hauptsächlichen Quellen	87
H. Kuchling, "Taschenbuch der Physik", 2022 (22. Auflage)	87
N. Marxer, "Physik Merkhilfe", 2019,	88
Anhang B Experimente	89
Statische Elektrizität	89
Eigenschaften der statischen Elektrizität	89
Aber wie funktioniert das alles genau?	90
Elektroskop	91
Aufbau und Funktionsweise	91
Elektroskop im Eigenbau	92
Ørsted Versuch	94
Magnetisierung eines Nagels	95
Mit Hilfe eines Permanentmagneten	95
Mit Hilfe einer Spule	95
Elektromotor	96
Messgerät	97

Anhang C	Kurze Geschichte der klassischen Elektrodynamik	98
1. Einleitung		98
2. Frühgeschichte: Von antiken Kenntnissen bis zum 17. Jahrhundert		98
3. Elektrizität und Magnetismus im 18. Jahrhundert		98
4. Der Beginn der modernen Elektrodynamik: Ørsted, Ampère und Faraday		99
5. Maxwells Revolution: Die Vereinigung von Elektrizität, Magnetismus und Licht		99
6. Die Bestätigung e.m. Wellen: Hertz und die Geburtsstunde der Funktechnik		99
7. Mathematische Struktur der Maxwellschen Theorie		100
8. Die klassische Elektrodynamik und die Relativitätstheorie		100
9. Technologische Folgen der Elektrodynamik		100
10. Abschluss		100
Anhang D	Mathematik: Vektor Theoreme / Identitäten	101
Zusammenfassung		101
Definition und Schreibweise		101
Gauss' Theorem		102
Stokes Theorem		102
$\text{div}[\text{grad}[\varphi]] = \Delta\varphi$	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = \Delta\varphi$	103
$\text{rot}[\text{grad}[\varphi]] = \vec{0}$	$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = \vec{0}$	103
$\text{div}[\text{rot}[\vec{F}]] = 0$	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$	103
$\text{rot}[\text{rot}[\vec{F}]] = \text{grad}[\text{div}[\vec{F}]] - \text{Laplace}$	$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \Delta \vec{F}$	104

# Vorbemerkung

Wir kennen in der Physik vier grundlegende **Kräfte** ...

- Gravitationskraft
- Elektromagnetische Kraft
- Starke Kernkraft
- Schwache Kernkraft

Der Gegenstand dieses Skripts ist der klassische Elektromagnetismus. Dies beinhaltet insbesondere ...

- die Lorentzkraft
  - Diese Kraft beschreibt die Kraft, die auf ein geladenes Teilchen in einem elektrischen und magnetischen Feld wirkt.
- die Maxwell-Gleichungen
  - Diese Gleichungen bestimmen das elektrische und magnetische Feld bei gegebenen elektrischen Ladungen und elektrischen Strömen.
  - Aus ihnen lassen sich auch viele Anwendungen ableiten: Generatoren, Motoren, Elektromagnetische Wellen
- Gleichstromkreise
- Wechselstromkreise

Wichtige Anwendungen und Theorien, die im 20. Jahrhundert parallel zur Quantentheorie entwickelt wurden ...

- Quantenelektrodynamik, Photonen
- Theorie der Atome und Festkörper, Spektren

werden in späteren Skripten behandelt werden.

Die klassische Elektrizitätslehre wurde vor allem im 19. Jahrhundert entwickelt. Bahnbrechende Experimente und massgebende Personen waren ...

## 1785 Coulomb Gesetz

- Charles Augustin de **Coulomb** (1736-1806, Link)
- Coulomb begründete die Elektrostatik und Magnetostatik und gilt als Entdecker des Coulomb'schen Gesetzes

## 1820 Magnetfeld um stromführenden Leiter

- Hans Christian **Ørsted** (1777-1851, Link)
- Ørsted entdeckte 1820 die magnetische Wirkung des elektrischen Stromes und gilt als Mitbegründer der Elektrizitätslehre und Elektrotechnik

## 1820 Biot-Savart Gesetz

- Jean-Baptiste **Biot** (1774 - 1862, Link) und Félix **Savart** (1791 - 1841, Link)
- Biot und Savart untersuchten gemeinsam den Zusammenhang zwischen dem elektrischen Strom und dem Magnetismus.

**1820 Durchflutungsgesetz (Ampèresches Gesetz)**

- André-Marie **Ampère** (1775 - 1836, Link)  
Ampère erklärte den Begriff der elektrischen Spannung und des elektrischen Stromes und legte die Stromrichtung fest.  
Er fand heraus, dass sich zwei parallele stromdurchflossene Leiter je nach Stromrichtung anziehen oder abstoßen können.

**1827 Ohm's Gesetz**

- Georg Simon **Ohm** (1789 - 1854, Link)  
Ohm wies nach, dass in einem stromdurchflossenen metallischen Leiter die sich einstellende elektrische Stromstärke / dem Quotienten aus angelegter elektrischer Spannung  $U$  und dem jeweiligen elektrischen Widerstand  $R$  entspricht.

**1831 Induktionsgesetz**

- Michael **Faraday** (1791 - 1867, Link)  
Faraday war ein begnadeter Experimentator. Er entdeckte die elektromagnetische Induktion (dass Magnetismus Elektrizität erzeugen kann) und damit die Grundlage für elektrische Transformatoren, Generatoren und Motoren, den Faraday'schen Käfig und vieles mehr.

**1848 Kraftlinien (elektrische und magnetische Felder)**

- Michael **Faraday** (1791 - 1867, Link)  
Faraday postulierte die Existenz von elektrischen und magnetischen Feldern.

**1845 Kirchhoff'sche Regeln (Maschensatz und Maschenpunktsatz)**

- Gustav Robert **Kirchhoff** (1824 - 1887, Link)  
Die Kirchhoffschen Regeln beschreiben den Zusammenhang zwischen mehreren elektrischen Strömen und zwischen mehreren elektrischen Spannungen in elektrischen Netzwerken.

**1859 Spektralanalyse**

- Gustav Robert **Kirchhoff** (1824 - 1887, Link)  
Kirchhoff entdeckte (zusammen mit Robert Wilhelm Bunsen) die Spektralanalyse, mit deren Hilfe Strahlung nach Wellenlänge, Energie ... untersucht werden kann.

**1887 Es gibt keinen Äther**

- Albert Abraham **Michelson** (1852 - 1931, Link) und Edward Williams **Morley** (1838 - 1923, Link)  
Mit Hilfe eines Interferometers fanden Michelson und Morley heraus, dass Licht (bzw. elektromagnetische Strahlung) zur Ausbreitung kein Medium bzw. keinen Äther braucht.

**1886 Elektromagnetische Wellen**

- Heinrich **Hertz** (1857-1894, Link)  
Hertz gelang es 1886 als Erstem, freie elektromagnetische Wellen experimentell zu erzeugen und nachzuweisen.

Die damals bekannten Experimente wurden von ...

James Clerk Maxwell (1831 - 1879, Link)

im Jahre 1864 in der Publikation “A dynamical theory of the electromagnetic field” (Link, Link) zusammengefasst. Diese Publikation enthielt insgesamt 20 wesentliche Gleichungen. Ein Teil dieser Gleichungen (2 skalare und 2 vektorielle Gleichungen) sind heute als **Maxwell-Gleichungen** bekannt.

Wir werden in diesem Skript viele neue physikalische Größen und Einheiten kennenlernen. Sehr wichtig sind insbesondere die folgenden Größen und ihre Formelzeichen ...

- Einheiten mit eigenem Namen ...
  - Ampere (A), Coulomb (C), Farad (F), Henry, (H) Ohm ( $\Omega$ ), Siemens (S), Tesla (T), Volt (V), Weber (Wb)
- Elektrische Feldstärke ( $\vec{E}$ ), el. Flussdichte ( $\vec{D}$ ), el. Polarisation ( $\vec{P}$ )
- Elektrische Feldkonstante ( $\epsilon_0$ ), Permittivitätszahl ( $\epsilon_r$ ), Permittivität ( $\epsilon$ ), el. Suszeptibilität ( $\chi_e$ )
- Magnetische Feldstärke ( $\vec{H}$ ), magn. Flussdichte ( $\vec{B}$ ), magn. Polarisation ( $\vec{J}$ ), Magnetisierung ( $\vec{M}$ )
- magn. Feldkonstante ( $\mu_0$ ), Permeabilitätszahl ( $\mu_r$ ), Permeabilität ( $\mu$ ), magn. Suszeptibilität ( $\chi_m$ )
- Elektrische Ladung (Q), Ladungsdichte ( $\rho$ )
- Elektrische Stromstärke ( $I$ ), el. Stromdichte ( $\vec{j}$ )
- Spannung ( $U$ ), elektrisches Potenzial ( $\phi$ )
- Elektrischer Widerstand ( $R$ ), spezifischer elektrischer Widerstand ( $\rho$ )
- Elektrischer Leitwert ( $G$ ), spez. el. Leitfähigkeit ( $\kappa$ )
- Elektrische Bauteile ...
  - Spannungsquelle, Stromquelle, Kabel, Verzweigung, Schalter
  - Ohm'scher Widerstand mit Widerstand  $R$ , Kondensator mit Kapazität  $C$ , Spule mit Induktivität  $L$

Wie in der Wärmelehre gehen wir auch hier deduktiv vor. Wir starten mit den wichtigsten Gleichungen der Elektrizitätslehre ...

- Lorentz Kraft
- Maxwell Gleichungen

und leiten daraus die experimentell gefundenen Gesetze bzw. Gleichungen (die dann zu den Maxwell-Gleichungen geführt haben) her wie beispielsweise ...

- Coulomb-Gesetz
- Ladungserhaltung
- Gesetz von Biot-Savart
- Induktionsgesetz
- Elektromagnetische Wellen
- URI, PUI
- Kirchhoff'scher Maschen- und Knotenpunktsatz

Wie früher geben wir auch in diesem Skript zunächst eine Übersicht, die sowohl als Zusammenfassung als auch als Repetition gelesen werden kann. Alle Formelzeichen und Gleichungen werden im Skript dann genau erklärt.

Dieses Skript ist mathematisch anspruchsvoller als die bisherigen: es verwendet insbesondere die Differential- und Integralrechnung sowie (bei den Wechselstromkreisen) die komplexen Zahlen. Sie müssen jedoch nicht unbedingt jeden Rechenschritt verstanden oder nachgerechnet haben, um eine gute Übersicht über die Elektrizitätslehre zu bekommen,

# Übersicht

## Lorentz - Kraft

Wir starten mit der Lorentz-Kraft  $\vec{F}_L$ . Sie gibt die Kraft an, die auf ein geladenes Teilchen mit der Ladung  $q$ , das sich mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v}$  in einem elektrischen Feld  $\vec{E}$  und einem Magnetfeld  $\vec{B}$  bewegt. Das Kreuz  $\times$  bedeutet das aus der Mechanik bekannte Vektorprodukt (bzw. Kreuzprodukt) ...

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

## Maxwell-Gleichungen

Wenn Ladungen (gegeben durch die Ladungsdichte  $\rho$ ) und elektrische Ströme (gegeben durch die Stromdichte  $\vec{j}$ ) vorhanden sind, bildet sich sowohl ein elektrisches Feld  $\vec{E}$  als auch ein magnetisches Feld  $\vec{B}$ . Wie diese beiden Felder mit den Ladungen und Strömen zusammenhängen wird durch die Maxwell-Gleichungen (zwei skalare und zwei Vektor-Gleichungen) beschrieben.

Sie lauten in **Differentialform** ...

(1)	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	Gauss' Gesetz
(2)	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	Gauss' Gesetz für Magnetismus
(3)	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Faraday Gesetz
(4)	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$	Ampère-Maxwell Gesetz

Hier sind  $\vec{\nabla}$ ,  $\frac{\partial}{\partial t}$  Ableitungen,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$  das Skalarprodukt mit Ableitungen und  $\vec{\nabla} \times \vec{E}$  das Vektorprodukt mit Ableitungen. Genauer ...

Nabla bzw. Del Operator  $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

Ableitung nach der Zeit  $\frac{\partial}{\partial t}$

Divergenz-Operator  $\text{div}[\vec{E}] = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z$

Der Punkt bedeutet Skalarprodukt.

Rotations-Operator  $\text{rot}[\vec{E}] = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}$

Das Kreuz bedeutet Vektorprodukt.

Diese Gleichungen sagen uns vielleicht nicht allzuviel. Besser verständlich sind die Maxwell-Gleichungen in Integralform.

Wir können sie mit Hilfe einiger mathematischer Theoreme herleiten, die für alle Felder  $\vec{F}$  gelten ...

Gauss Theorem	$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV = \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{dS}$
Stokes Theorem	$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{dS} = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{dL}$
Allgemein:	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$ d.h. $\text{div}[\text{rot}[\vec{F}]] = 0$

Diese Theoreme werden wir im Laufe des Skripts immer wieder verwenden. Sie sind ausführlich im Anhang D beschrieben.

Die Maxwell-Gleichungen lauten nach der Umformung in **Integralform** ...

$$\begin{aligned}
 (1)' \quad \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{inside}} \\
 (2)' \quad \oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 \\
 (3)' \quad \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \Phi_{B,S} \\
 (4)' \quad \oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{S} &= \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_S + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \Phi_{E,S}
 \end{aligned}$$

Wir analysieren diese Gleichungen in der Integralform und können einiges ableiten ...

- Gauss' Gesetz  $\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{inside}}$ 
  - Der elektrische Fluss durch eine geschlossene Fläche wird bestimmt durch die Ladung im eingeschlossenen Volumen.
  - Elektrische Feldlinien starten bei positiven Ladungen und enden bei negativen Ladungen.
- Gauss' Gesetz für Magnetfelder  $\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ 
  - Der magnetische Fluss durch eine geschlossene Fläche ist Null.
  - Magnetische Feldlinien sind geschlossene Kurven.
  - Es gibt keine magnetischen Monopole.
- Gesetz von Faraday  $\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{L} = -\frac{d}{dt} \Phi_{B,S}$ 
  - Das Induktionsgesetz: Eine Änderung des magnetischen Flusses durch eine zusammenhängende Fläche S induziert ein elektrisches Feld entlang des Rands der Fläche.
- Gesetz von Ampère-Maxwell  $\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{L} = \mu_0 I_S + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \Phi_{E,S}$ 
  - Ein Magnetfeld entlang des Rands einer Fläche geht einher mit einem Strom durch diese Fläche und einer Änderung des elektrischen Flusses durch diese Fläche.

Bei der dritten gebräuchlichen Darstellung der Maxwell-Gleichungen kommen nur die freien Ladungen und freien Ströme vor, nicht jedoch die in den Atomen und Molekülen gebundenen durch das elektrische Feld getrennten Dipolladungen und auch nicht die in den Atomen und Molekülen auf Grund des Magnetfelds entstehenden gebundenen Kreisströme. Diese gebundenen Ladungen und Kreisströme werden im Feld  $\vec{D}$  und im Feld  $\vec{H}$  integriert.

Dies ist möglich, da die Polarisationen  $\vec{P}$  und  $\vec{J}$  folgendermassen geschrieben werden können ...

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \stackrel{\text{lineare Materialien}}{=} \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J} \stackrel{\text{lineare Materialien}}{=} \mu \vec{H}$$

Die Maxwell-Gleichungen können mit den freien Ladungen und Strömen folgendermassen geschrieben werden ...

$$\begin{aligned}
 (1)'' \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho_{\text{frei}} && \text{Gauss Gesetz} \\
 (2)'' \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 && \text{Gauss Gesetz für Magnetismus} \\
 (3)'' \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} && \text{Faraday Gesetz} \\
 (4)'' \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J}_{\text{frei}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} && \text{Ampère-Maxwell Gesetz}
 \end{aligned}$$

## Folgerungen aus den Maxwell Gleichungen

Wir können aus den Maxwell-Gleichungen neben den oben erwähnten weitere Feststellungen machen bzw. Gesetze ableiten.

### Coulomb-Kraft

Aus der Gleichung (1)' können wir das elektrische Feld um eine Punktladung  $Q$  bestimmen. Wir integrieren über das Volumen einer Kugel mit der Punktladung im Zentrum ...

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} \xrightarrow{\text{Symmetrie}} 4\pi r^2 * E \stackrel{(1)'}{=} \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{inside}} = \frac{1}{\epsilon_0} Q$$

und erhalten das **elektrische Feld um eine Punktladung** ...

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Die Feldlinien starten bei den positiven Ladungen und enden bei negativen Ladungen. Mit Hilfe der Lorentzkraft  $\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  folgt dann die **Coulomb-Kraft** zwischen zwei Punktladungen ...

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2}$$

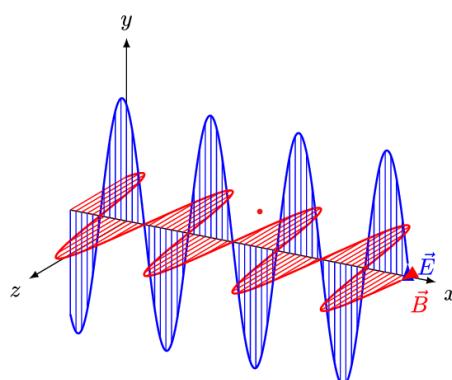
wobei wir feststellen, dass sich Ladungen mit gleichem Vorzeichen abstoßen und Ladungen mit ungleichem Vorzeichen anziehen.

### Ladungserhaltung

Wir leiten dann aus der vierten Maxwell-Gleichung (4) die Ladungserhaltung her. Wenn ein elektrischer Strom in ein Volumen hineinfliest, dann muss die Ladung im Volumen entsprechend zunehmen.

$$\text{Wellengleichung} \quad \Delta \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad \Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Kombination der Maxwell-Gleichungen führt auf zwei Wellengleichungen: eine für das elektrische Feld, eine zweite für das magnetische Feld. Die Richtungen der beiden Felder stehen senkrecht aufeinander und sind auch senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.



Diese Felder breiten sich mit der Geschwindigkeit  $\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  aus. Dies entspricht der Lichtgeschwindigkeit.

Dies bedeutet auch, dass die Optik ein Teilgebiet des Elektromagnetismus ist.

Weitere Folgerungen aus den Maxwell-Gleichungen ...

- Die Gleichungen (3)' und (4)' zeigen uns auch, dass das elektrische Feld und das magnetische Feld miteinander verknüpft sind. Das bedeutet, dass die beiden Gebiete Elektrizität und Magnetismus im Gebiet **Elektromagnetismus** vereint sind.
- Wenn wir stationäre Situationen betrachten, fallen die Zeitableitungen  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  und  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  weg und wir haben die beiden Felder entkoppelt. Diese Situation wird in der Elektrostatik und der Magnetostatik behandelt.
- Zusätzliche Analysen werden auch noch in verschiedenen weiteren Kapiteln abgehandelt.

## Elektrostatik

In der Elektrostatik (die zeitlichen Ableitungen werden 0 gesetzt) kommt das elektrische Feld nur in den Gleichungen (1) und (3) der Maxwell-Gleichungen vor. Sie lauten ...

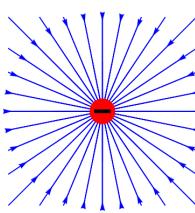
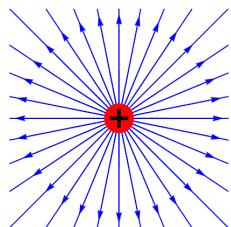
$$(1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$(3) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$(1)' \quad \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{inside}}$$

$$(3)' \quad \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Eine Analyse von (1)' liefert uns das elektrische Feld um eine positive und eine negative Punktladung ...

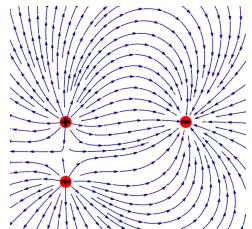


$$\vec{E}[\vec{x}] = \frac{Q}{4\pi} * \frac{\vec{x} - \vec{x}_P}{|\vec{x} - \vec{x}_P|^3}$$

bzw. betragsmäig

$$E[\vec{x}] = \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_P|^2}$$

Superposition dieser Felder gibt uns dann das elektrische Feld für kompliziertere Situationen ...



In der Elektrostatik gilt, dass ein Kreisintegral gleich 0 ist ...

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Das heisst auch, dass das Integral von A nach B (d.h.  $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$ ) vom Weg unabhängig ist und dass deshalb ein **Potenzial  $\varphi$**  definiert werden kann, das nur vom Ort abhängt (nicht aber vom zurückgelegten Weg).

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \varphi[A] - \varphi[B]$$

Das elektrische Feld ergibt sich aus dem elektrischen Potenzial durch eine Ableitung ...

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi = -\text{grad}[\varphi]$$

Wir zeigen danach, dass aus dieser Beziehung und der Maxwell-Gleichung (1) die sogenannte **Poisson-Gleichung** ...

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$\Delta$  ist der Laplace-Operator

gefunden werden kann. Dies ist die zentrale Gleichung der Elektrostatik. Mit ihr wird bei beliebigen Ladungsverteilungen und Randbedingungen das Potenzial und weiter das elektrische Feld bestimmt.

In diesem Kapitel werden auch einige zentrale Begriffe definiert.

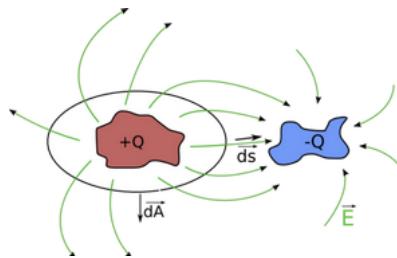
- Die **elektrische Spannung  $U$**  ist die Arbeit pro Ladung, die notwendig ist, um die Ladung von A nach B zu transportieren.

$$U = \varphi[B] - \varphi[A] = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{W_{AB}}{q}$$

- Die **elektrische Kapazität  $C$**  ist die Fähigkeit eines Körpers, elektrische Ladung zu speichern, und ist das Verhältnis der gespeicherten Ladung  $Q$  zur zugehörigen Spannung  $U$ .

$$C = \frac{Q}{U}$$

$$Q = C U$$



- Unter dem **Widerstand  $R$**  versteht man das Verhältnis der Spannung zwischen den Enden eines Leiters zur Stärke des Stroms im Leiter. Wir lernen auch die Begriffe elektrischer Leitwert  $G$  sowie die Materialwerte spezifischer elektrischer Widerstand  $\rho$  und spezifische elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  kennen.

makroskopische Betrachtung:

$$\text{elektrischer Widerstand } R$$

$$R = \frac{U}{I}$$

spez. el. Widerstand  $\rho$

$$\text{elektrischer Leitwert } G$$

$$G = \frac{1}{R}$$

spez. el. Leitfähigkeit  $\sigma = \frac{1}{\rho}$

mikroskopische Betrachtung:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Zum Abschluss dieses Kapitels untersuchen wir noch die bei elektrischen Feldern auftretenden Kräfte, Arbeiten, Energien und Leistungen. Zusammenfassend ...

$$\vec{F} = q \vec{E}$$

siehe Lorentzkraft

$$W = q E s$$

Arbeit = Kraft mal Weg

$$U = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{W}{q}$$

Elektrische Spannung = Arbeit pro Ladung

$$P = UI$$

Das wichtige Gesetz, das die umgesetzte Leistung in einem Stromkreis angibt.

## Magnetostatik

In der Magnetostatik (die zeitlichen Ableitungen werden 0 gesetzt) kommt das magnetische Feld nur in den Gleichungen (2) und (4) der Maxwell-Gleichungen vor. Sie lauten ...

$$(2) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$(2)' \quad \oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$(4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$(4)' \quad \oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{L} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_S$$

Ähnlich wie in der Elektrostatisitk können wir hier ein Potenzial, hier das sogenannte **Vektorpotenzial  $\vec{A}$** , durch die folgende Gleichung einführen ...

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Durch diese Definition wird die Maxwell-Gleichung (2) automatisch erfüllt, denn ...

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

ist eine Vektoridentität, die für alle Felder gilt. Mit Hilfe einer weiteren Vektoridentität ...

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

kommen wir auf die folgende Poisson-Gleichung für das Vektorpotenzial  $\vec{A}$  ...

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

Dies ist die zentrale Gleichung der Magnetostatik. Aus dieser Gleichung lässt sich auch das Gesetz von Biot-Savart ableiten, mit dem sich das Magnetfeld aus einem stromführenden Draht bzw. einer gegebenen Stromverteilung berechnen lässt ...

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\text{Draht}} \frac{\vec{ds} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{| \vec{r} - \vec{r}' |^3} \quad \text{oder} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{| \vec{r} - \vec{r}' |^3} dV$$

Für einfache Situationen können wir jedoch schon aus den Maxwell Gleichungen direkt einige Schlussfolgerungen in der Magnetostatik ziehen.

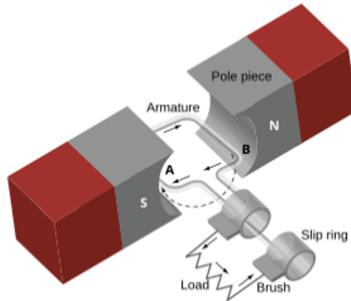
## Elektrodynamik

Wenn wir die zeitlichen Änderungen des elektrischen und magnetischen Feldes berücksichtigen, haben wir es mit den vollen Maxwell-Gleichungen zu tun.

Die drittte Maxwell-Gleichung (3)' ist das Gesetz von Faraday ...

$$U_{\text{ind}} = \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \phi_{B,S}$$

und beschreibt die Induktion: dass ein sich ändernder magnetischer Fluss eine Umlaufspannung/Induktionsspannung erzeugt und bei einem geschlossenen Leiter einen Induktionsstrom.



Dies ist das zentrale Gesetz für Transformatoren, Generatoren und elektrische Motoren.

Die andere Maxwell-Gleichung mit einer Zeitabhängigkeit ist die vierte Gleichung ...

$$(4) \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$(4)' \quad \oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{L} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_S + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \phi_{E,S}$$

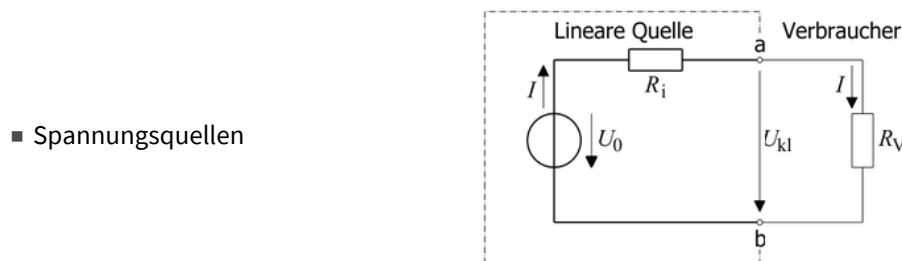
Mit deren Hilfe lässt sich für einfache symmetrische Situationen das Magnetfeld um einen Leiter schnell bestimmen.

Die vierte Maxwell-Gleichung wird auch als Ampère-Maxwell Gesetz bezeichnet.

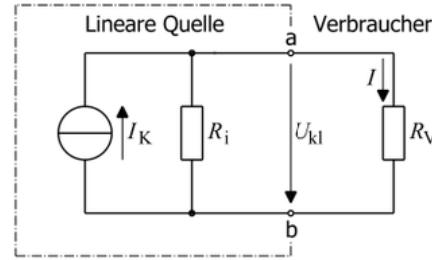
Ampère lieferte die Beobachtung, dass sich um einen stromdurchflossenen Leiter ein Magnetfeld bildet: d.h. den  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  Teil der Gleichung. Da diese Gleichung - zusammen mit den anderen Maxwell-Gleichungen - die Ladungserhaltung verletzte, führte Maxwell aus theoretischen Gründen den sogenannten Verschiebungsstrom  $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  hinzzu.

## Elektrische Bauteile

Das folgende Kapitel behandelt dann elektrische Bauteile:

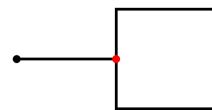


- Stromquellen



- Leiter (Verbindung zwischen Bauteilen). Der Widerstand eines Kabels hängt gemäss  $R = \frac{\rho L}{A}$  von der Länge, dem Querschnitt und dem spezifischen Widerstand ab.

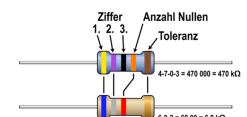
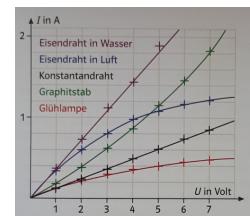
- Verzweigungen



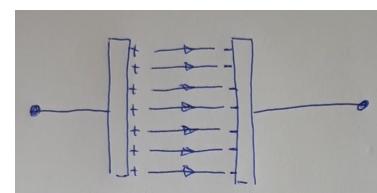
- Schalter



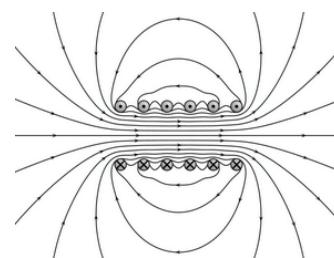
- Widerstände ( $U = R I$ )



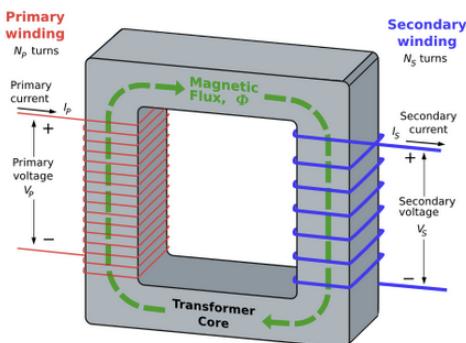
- Kondensatoren ( $Q = C U$ )



- Spulen ( $\ddot{Q} = \frac{1}{L} U$ )



- Transformatoren ( $\frac{I_2}{I_1} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}$ )



## Stromkreise

Das Kapitel "Stromkreise" widmet sich dann Stromkreisen, bei denen verschiedene elektrische Bauteile zusammengeschaltet sind.

Zunächst begründen wir, warum ...

- Spannungsmessgeräte parallel zur elektrischen Komponente angeschlossen werden und
- Strommessgeräte seriell in den Stromkreis eingefügt werden.

Dann gehen wir auf die Analyse von Stromkreisen ein. Wichtig bei der Analyse sind die beiden Kirchhoff'schen Gesetze ...

- Der **Kirchhoff'sche Maschensatz** besagt ...

In jeder Masche eines unter Umständen verzweigten Stromkreises ist die Summe aller Spannungabfälle (mit entsprechendem Vorzeichen) gleich 0.

- Der **Kirchhoff'sche Knotenpunktsatz** besagt ...

In einer Stromverzweigung (Knotenpunkt) ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme.

sowie die Formeln für ...

- ohm'sche Widerstände  $U = RI$
- Kondensatoren  $Q = CU$
- Spulen  $\ddot{Q} = \frac{1}{L}U$

Wenn gleiche **Elemente in Serie- oder parallel** angeordnet sind, können diese durch ein einziges Element ersetzt werden, das bei gleicher Spannung die gleiche Stromstärke zur Folge hat. Die Berechnung erfolgt folgendermassen für ...

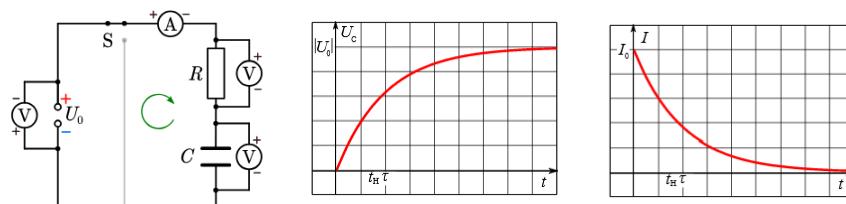
- den Ersatzwiderstand  $R_{\text{Ersatz,Serie}} = R_1 + R_2 + R_3$   $R_{\text{Ersatz,parallel}} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1}$
- die Ersatzkapazität  $C_{\text{Ersatz,Serie}} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)^{-1}$   $C_{\text{Ersatz,parallel}} = C_1 + C_2 + C_3$
- die Ersatzinduktivität  $L_{\text{Ersatz,Serie}} = L_1 + L_2 + L_3$   $L_{\text{Ersatz,parallel}} = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}\right)^{-1}$

Da der elektrische Leitwert der Kehrwert des elektrischen Widerstands ist, kann mit den Leitwerten manchmal einfacher gerechnet werden. Beispielsweise bei Parallelschaltung von Widerständen ...

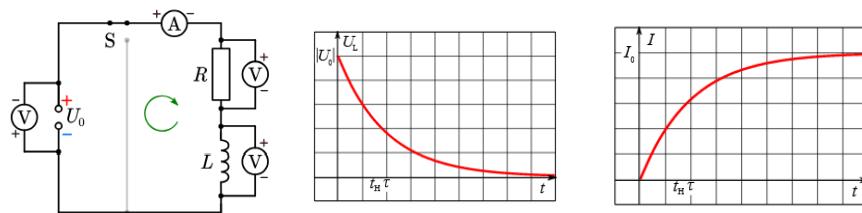
$$R_{\text{Ersatz,parallel}} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} \rightarrow \frac{1}{R_{\text{Ersatz,parallel}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \rightarrow G_{\text{Ersatz,parallel}} = G_1 + G_2 + G_3$$

Bei **Gleichstromkreisen** können wir verschiedene Untersuchungen durchführen ...

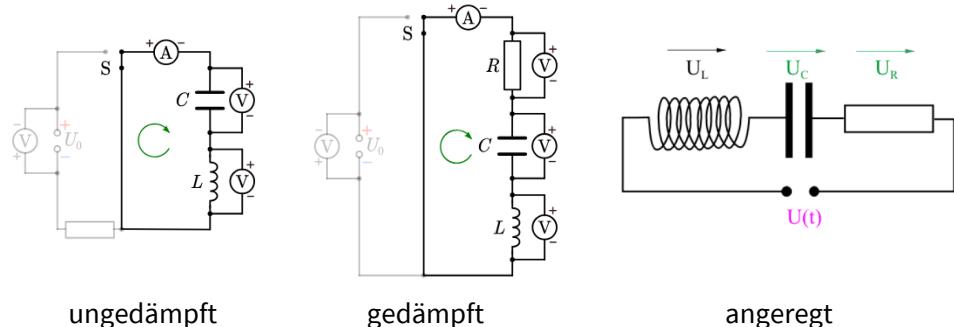
- Wir können für eine nur aus ohm'schen Widerständen bestehende Schaltung ...
  - den Ersatzwiderstand der Schaltung berechnen, indem wir wiederholt serielle und parallele Bauteile durch ihren Ersatzwiderstand ersetzen,
  - oder die Stromstärken und Spannungsabfälle bei jedem Widerstand berechnen.
- Wir können die zeitlich veränderlichen Stromstärken und Spannungen beim Ein- oder Ausschalten eines Stromkreises, der aus einer Batterie, einem ohm'schen Widerstand und einem Kondensator besteht, bestimmen. Ein elektrisches Feld wird im Kondensator aufgebaut. Aufladen erfolgt gemäss ...



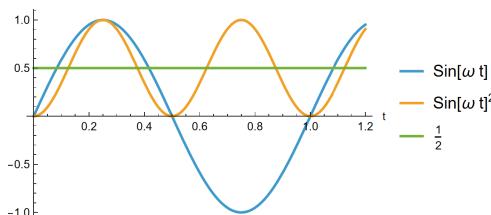
- Wir können die zeitlich veränderlichen Stromstärken und Spannungen beim Ein- oder Ausschalten eines Stromkreises, der aus einer Batterie, einem ohm'schen Widerstand und einer Spule besteht, bestimmen. Ein magnetisches Feld wird in der Spule aufgebaut. Aufladen erfolgt gemäss ...



Weiters analysieren wir einen elektrischen **Schwingkreis**. Wir haben die gleichen Differentialgleichungen wie in der Mechanik beim Masse-Feder-Pendel. Sie führen auch auf die gleichen Lösungen für die ungedämpfte Schwingung, die gedämpfte Schwingung sowie die durch eine harmonische Wechselspannung angeregte Schwingung.



Bei einem harmonischen Wechselstrom  $u[t] = \hat{u} \sin[\omega t]$  ändern sich die Spannung und der Strom harmonisch mit der Zeit. Wenn sie in Phase sind, ist die Leistung proportional zu  $u[t]^2$  ...

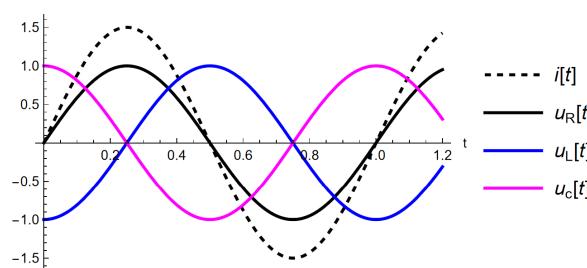


und die effektive Leistung (die so definiert ist, dass ein Wechselstromkreis mit der Wechselspannung  $\hat{u} \sin[\omega t]$  die gleiche Leistung wie ein Gleichstromkreis mit der Spannung  $u_{\text{eff}}$  ergibt) entspricht ...

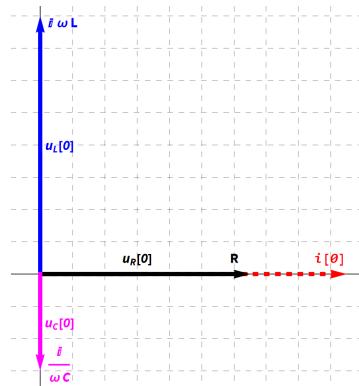
$$u_{\text{eff}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \approx 0.707 \hat{u}$$

Wenn über den Bauteilen Widerstand, Kondensator und Spule eine **harmonische Wechselspannung** angelegt wird, dann zeigen sie ein unterschiedliches zeitliches Verhalten ...

- Beim Widerstand sind die Spannung und der Strom synchron.
- Bei der Spule eilt die Spannung dem Strom um  $90^\circ$  hinterher.
- Beim Kondensator eilt die Spannung dem Strom um  $90^\circ$  voraus.



Dieses zeitliche Verhalten kann anschaulich mit dem Zeigerdiagramm dargestellt werden ...

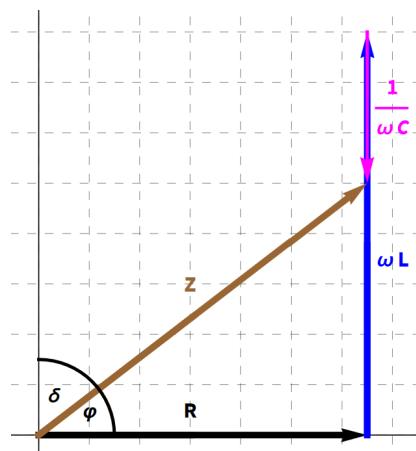


Mit Hilfe der komplexen Zahlen ( $i$  ist die imaginäre Einheit) können die Impedanzen bestimmt werden ...

- Widerstand  $R$
- Spule  $X_L = i \omega L$  Multiplikation mit  $i$  heist Drehung um  $+90^\circ$  (voraus)
- Kondensator  $X_C = \frac{1}{i \omega C} = -\frac{i}{\omega C}$  Multiplikation mit  $-i$  heist Drehung um  $-90^\circ$  (hinterher)

Die Analyse von Wechselstromkreisen ist dann analog zur Analyse von Gleichstromkreisen. Die Ersatzimpedanzen werden bei Serien- und Parallelschaltungen wie die Ohm'schen Widerstände beim Gleichstromkreis berechnet.

Graphisch kann dies im Zeigerdiagramm anschaulich dargestellt werden, indem die Impedanzen entsprechend addiert werden (hier:  $Z = R + i \omega L + \frac{1}{i \omega C}$ ) ...



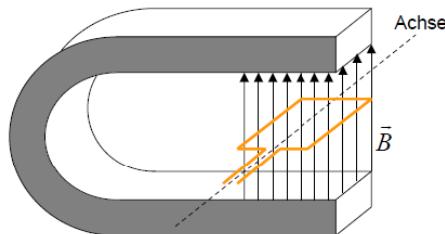
Es gibt die folgenden Bezeichnungen ...

- Der Realteil der Impedanz  $Z$  ist  $R$  und wird **Wirkwiderstand** genannt. Der Wirkwiderstand führt auf die tatsächlich verbrauchte (vom Stromkreis in eine andere Energieform umgewandelte) Leistung.
- Der Imaginärteil der Impedanz  $Z$  ist  $X = X_L - X_C$  und wird **Blindwiderstand** genannt. Es fließt ein Strom zwischen Spule (Magnetfeld auf- und abbauen) und Kondensator (elektrisches Feld auf- und abbauen) hin- und her, es findet aber kein Energieverlust statt.
- Der Betrag der vektoriellen Summe (bzw. komplexen Addition) ergibt den **Scheinwiderstand**  $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ .
- $\varphi$  ist die **Phasenverschiebung**. Sie wird berechnet mittels  $\varphi = \text{ArcTan}\left[\frac{X}{R}\right] = \text{ArcTan}\left[\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right]$ .
- $\delta$  ist der **Verlustwinkel**. Es gilt  $\delta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ .

## Elektrische Maschinen

Wir behandeln hier den Generator und den elektrischen Motor, bei denen mechanische Energie in elektrische Energie umgewandelt wird bzw. umgekehrt.

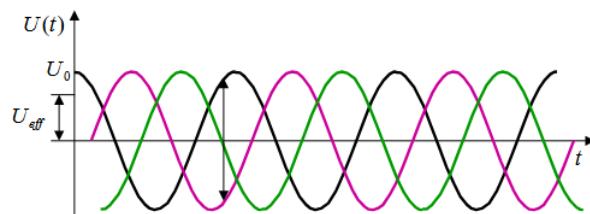
Der einfachste Aufbau eines **Generators** ist eine drehbar gelagerte Leiterschleife im Magnetfeld.



Wenn sich die Leiterschleife mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  dreht, dann ändert sich die Fläche  $A$  der Leiterschleife im Magnetfeld und es wird eine harmonische Wechselspannung im Leiter induziert (Induktionsgesetz).

Zur Versorgung der Haushalte wird in Europa die Wechselspannung mit einer effektiven Spannung von **220 Volt** und einer Frequenz von 50 Hz verwendet. Die Amplitude beträgt  $\sqrt{2} \cdot 220 \text{ V} \approx \mathbf{311 \text{ V}}$ .

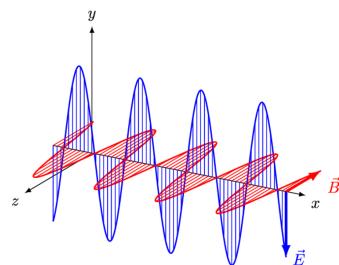
Eigentlich stehen drei "Phasen" L1, L2 und L3 mit jeweils 220 V zur Verfügung, die jeweils eine um 120° phasenverschobene Wechselspannung gegenüber dem Nullleiter besitzen (Drehstrom) und jeweils eine effektive Spannung von 381 V liefern.



Der Motor ist ein rückwärts betriebener Generator: elektrische Energie wird in mechanische Energie umgewandelt.

## Elektromagnetische Schwingungen und Wellen

In letzten Kapitel "Elektromagnetische Schwingungen und Wellen" gehen wir noch kurz auf die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen ein.

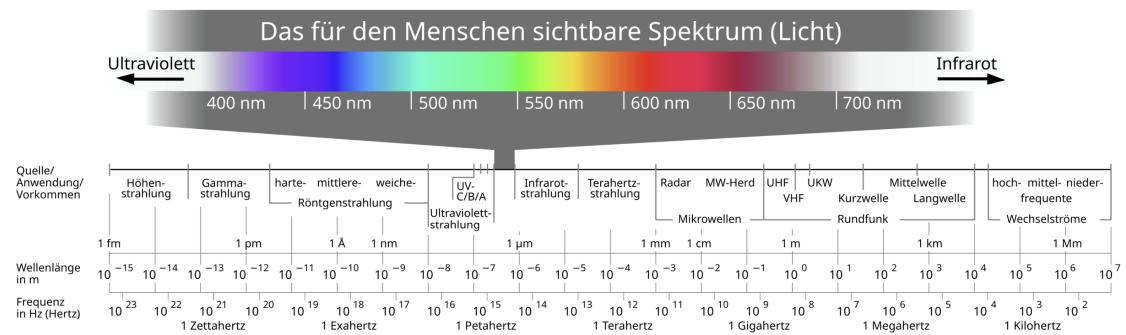


Die Wellen breiten sich im Vakuum mit Lichtgeschwindigkeit aus, die elektrischen und magnetischen Feldvektoren stehen senkrecht aufeinander und sind in Phase. Die von ihnen transportierte Leistung pro Fläche wird durch den sogenannten **Poynting Vektor**  $\vec{S}$  ...

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$$

beschrieben.

Die elektromagnetischen Wellen umfassen einen sehr grossen Wellenlängenbereich ...



# Lorentz-Kraft $\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Elektrische Ladungen können sich anziehen oder abstoßen. Wie ist es möglich, dass dies geschieht, ohne dass sie Kontakt miteinander haben? Die Antwort darauf ist die gleiche wie bei der Massenanziehung. Ähnlich wie Massen ein Gravitationsfeld erzeugen, erzeugen die Ladungen ein elektrisches Feld und bewegte Ladungen ein Magnetfeld.

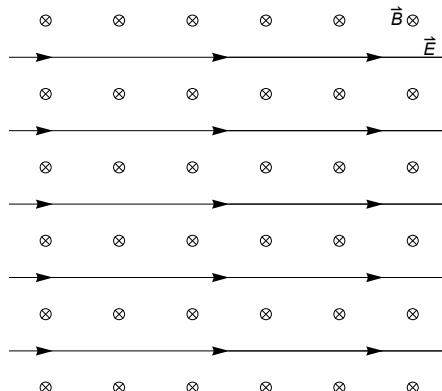
Und diese beiden Felder üben eine Kraft auf ein geladenes Teilchen aus. Ein Teilchen mit der Ladung  $q$ , das sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  in einem elektrischen Feld mit der Feldstärke  $\vec{E}$  und einem magnetischen Feld mit der magnetischen Flussdichte  $\vec{B}$  bewegt, erfährt die sogenannte **Lorentz-Kraft** ...

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

mit	Lorentz-Kraft	$\vec{F}_L$	$[F_L] = \text{N}$
	Geschwindigkeit	$\vec{v}$	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
	Elektrische Ladung	$q$	$[q] = \text{C} = \text{As}$
	Elektrische Feldstärke	$\vec{E}$	$[E] = \frac{\text{V}}{\text{m}} = \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^3 \cdot \text{A}}$
	Magnetische Flussdichte	$\vec{B}$	$[B] = \text{T} = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2 \cdot \text{A}}$
	Vektorprodukt	$\times$	rechte Hand Regel zur Bestimmung der Richtung

mit den Einheiten der Elektrizitätslehre ...

Ampere (A), Coulomb (C), Volt (V), Tesla (T), Weber (Wb)



**Abbildung** Feldlinienbild eines homogenen elektrischen und eines homogenen magnetischen Feldes, die senkrecht aufeinander stehen.  
 Die Richtung des elektrischen Feldstärkevektors  $\vec{E}$  ist nach rechts.  
 Die Richtung des magnetischen Flussdichtevektors  $\vec{B}$  ist in die Zeichenebene hinein.

Wie wirken nun diese Felder auf eine Probeladung?

- Wenn eine positive Probeladung (d.h. eine kleine Ladung, die das vorhandene Feld nicht verändert) in obigem Feld positioniert wird, erfährt sie (unabhängig von der Geschwindigkeit) auf Grund des elektrischen Feldes die Kraft  $q\vec{E}$  nach rechts. Die Probeladung wird beschleunigt. Eine negative Probeladung würde nach links beschleunigt.
- Wenn diese positive Probeladung in der obigen Abbildung eine Geschwindigkeit  $\vec{v}$  nach rechts hat, dann wirkt zusätzlich auf Grund des magnetischen Feldes die Kraft  $q(\vec{v} \times \vec{B})$  nach oben (gemäss der Rechte Hand Regel für das Vektorprodukt). Die Probeladung erfährt somit eine Richtungsänderung. Die Schnelligkeit  $v$  bleibt jedoch gleich, denn die Kraft ist immer senkrecht zur Geschwindigkeit. Dies führt zu einer Kreisbewegung der Probeladung (wenn nicht auch noch ein elektrisches Feld vorhanden ist und die Schnelligkeit verändert).

Die physikalischen Größen  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  beschreiben das **elektrische** bzw. das **magnetische Feld**.

Feld bedeutet, dass an jeder Stelle des Raums ( $x, y, z$ ) der elektrische Feldstärkevektor  $\vec{E}$  und der magnetische Flussdichtevektor  $\vec{B}$  eine bestimmte Größe und Richtung haben. Die Felder können zusätzlich auch noch von der Zeit abhängen.

Wie gross sind nun diese Felder? Die beiden Vektorfelder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  lassen sich mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen aus einer gegebenen Ladungs- und Stromdichteverteilung bestimmen. Diese Maxwell-Gleichungen werden wir im nächsten Abschnitt behandeln.

# Maxwell-Gleichungen

## Einleitung

Die **Maxwell-Gleichungen** (Link, Link) können in unterschiedlicher Form geschrieben werden ...

- Mit oder ohne Ladungen und Stromdichten, d.h. für Vakuum.
- In differentieller oder integraler Form.
- Nur mit den Feldern  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  oder zusätzlich mit den Feldern  $\vec{D}$  und  $\vec{H}$ .
- In verschiedenen Einheitensystemen: SI, cgs, ...

Da in der Lorentz-Kraft die Größen  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  vorkommen, gehen wir zunächst von dieser Darstellung in differentieller Form aus. Wir werden die anderen Schreibweisen im Laufe des Skripts noch kennenlernen.

## Maxwell-Gleichungen mit $\vec{E}$ und $\vec{B}$

Die **Maxwell-Gleichungen** (Link) wurden von James Clerk Maxwell (1831-1879, Link) im Jahre 1865 veröffentlicht. Die heute gängige Vektorschreibweise wurde erst später eingeführt. In SI-Einheiten lauten die Maxwell-Gleichungen ...

(1)	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	Gauss' Gesetz
(2)	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	Gauss' Gesetz für Magnetismus
(3)	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Faraday Gesetz
(4)	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$	Ampère-Maxwell Gesetz

### Bemerkungen

- Diese Gleichungen beschreiben eine Beziehung zwischen den verschiedenen physikalischen Größen an einer bestimmten Stelle ( $x, y, z$ ) zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$ .
- Dies sind insgesamt **8 Gleichungen**, denn ...
  - Die Gleichungen (1) und (2) sind skalare Gleichungen.
  - Die Gleichungen (3) und (4) sind Vektorgleichungen.
- Die folgenden **physikalischen Größen** kommen darin vor ...

Elektrische Feldstärke	$\vec{E}$	$[E] = \frac{V}{m} = \frac{N}{C} = \frac{kg \cdot m}{s^3 \cdot A}$
Magnetische Flussdichte	$\vec{B}$	$[B] = T = \frac{Wb}{m^2} = \frac{Vs}{m^2} = \frac{kg}{s^2 \cdot A}$
Elektrische Ladungsdichte	$\rho$	$[\rho] = \frac{C}{m^3} = \frac{As}{m^3}$
Elektrische Stromdichte	$\vec{j}$	$[j] = \frac{A}{m^2}$
Elektrische Feldkonstante	$\epsilon_0$	$\epsilon_0 = 8.8541878188(14) * 10^{-12} \frac{As}{Vm}$
Magnetische Feldkonstante	$\mu_0$	$\mu_0 = 1.25663706127(20) * 10^{-6} \frac{N}{A^2}$

■ und die **Differentialoperatoren** ...

Nabla bzw. Del Operator  $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

Ableitung nach der Zeit  $\frac{\partial}{\partial t}$

Divergenz-Operator  $\text{div}[\vec{E}] = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z$

Der Punkt bedeutet Skalarprodukt.

Rotations-Operator  $\text{rot}[\vec{E}] = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}$

Das Kreuz bedeutet Vektorprodukt.

Wir sehen, dass die Differentialrechnung auch in der Elektrizitätslehre eine herausragende Rolle spielt.

Dies sieht alles recht kompliziert aus. Wir gehen nun Schritt für Schritt vor und lernen nach und nach die Bedeutung der verschiedenen Gleichungen kennen.

## Maxwell-Gleichungen in Integralform

### Einleitung

Mit Hilfe der zwei mathematischen Vektor Identitäten ...

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV = \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{dS} \quad \text{Gauss Theorem}$$

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{dS} = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{dL} \quad \text{Stokes Theorem}$$

mit den Bedeutungen ...

$V$  beliebiges Volumen  $\partial V$  geschlossene Oberfläche des Volumens

$S$  beliebige Fläche  $\partial S$  geschlossener Rand der Fläche

$\oint_{\partial V}$  Flächenintegral über die ganze Volumenoberfläche

$\oint_{\partial S}$  Linienintegral über den ganzen Rand der Fläche

die für alle Felder  $\vec{F}$  und beliebige Volumina  $V$  und Flächen  $S$  gelten (siehe Anhang C und Link), folgen die Maxwell-Gleichungen in Integralform.

$$(1)' \quad \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{inside}}$$

$$(2)' \quad \oint_{\partial V} \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0$$

$$(3)' \quad \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \vec{dS} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = -\frac{d}{dt} \phi_{B,S}$$

$$(4)' \quad \oint_{\partial S} \vec{B} \cdot \vec{dS} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \vec{dS} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \mu_0 I_S + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \phi_{E,S}$$

Wir werden diese Umformungen in den nächsten Abschnitten für alle vier Maxwell-Gleichungen durchführen.

## Gauss' Gesetz

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Wir integrieren die erste Maxwell-Gleichung  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  über ein beliebiges Volumen V ...

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{E}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

und erhalten für die linke und die rechte Seite der Gleichung ...

$$\text{LS} \quad \int_V (\nabla \cdot \vec{E}) dV \stackrel{\text{Gauss}}{=} \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{RS} \quad \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad Q \text{ ist die gesamte Ladung innerhalb des Volumens}$$

Wir können somit zusammenfassen ...

$$(1)' \quad \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{inside}}$$

Bemerkungen

- Die Feldlinien von  $\vec{E}$  starten bei positiven Ladungen und enden bei negativen Ladungen.
- Der elektrische Fluss  $\phi_E = \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S}$  durch die Oberfläche wird von der Ladung (geteilt durch  $\epsilon_0$ ) bestimmt, die sich innerhalb des Volumens befindet.

Wir werden im Kapitel "Elektrostatisik" noch weiter darauf eingehen.

## Gauss' Gesetz für Magnetfelder

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Wir integrieren die zweite Maxwell-Gleichung  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  über ein beliebiges Volumen V ...

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{B}) dV = 0$$

Mit Hilfe des Satz von Gauss (wie vorher) erhalten wir ...

$$(2)' \quad \oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Bemerkungen

- Der Ausdruck  $\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S}$  wird als **magnetischer Fluss** durch die Oberfläche  $\partial V$  bezeichnet.
- Der magnetische Fluss über die (geschlossene) Oberfläche  $\partial V$  eines beliebigen Volumens ist gleich 0.
- Der Fluss ins Volumen hinein ist demnach gleich dem Fluss aus dem Volumen heraus.
- Es gibt **keine** magnetischen Ladungen bzw. **magnetischen Monopole**, wo die Feldlinien von  $\vec{B}$  enden oder starten könnten.
- Die Feldlinien von  $\vec{B}$  sind somit geschlossene Kurven.

## Gesetz von Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Wir integrieren die dritte Maxwell-Gleichung  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  über eine beliebige Fläche S ...

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = \int_S \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

und erhalten für die linke und die rechte Seite der Gleichung ...

$$\text{LS} \quad \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\text{RS} \quad \int_S \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \text{Ableitung vor das Integral, da sich die Fläche S nicht ändert}$$

Wir können somit zusammenfassen ...

$$(3)' \quad \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Dies ist das **Induktionsgesetz**. Mit den folgenden Definitionen ...

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \phi_{B,S} \quad \text{magnetischer Fluss} \quad [\phi_{B,S}] = \text{Weber (Wb)}$$

$$U_{\text{ind}} = \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \text{elektrische Umlaufspannung}$$

folgt das **Induktionsgesetz** in folgender Form ...

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt} \phi_{B,S} \quad \text{Induktionsgesetz}$$

Bemerkungen

- Eine Änderung des magnetischen Flusses durch eine Fläche S induziert ein elektrisches Feld entlang des Rands der Fläche.
- Wenn der Rand ein Leiter ist, dann wird ein Strom induziert.

Wir werden dies im Kapitel "Elektrodynamik" noch vertiefen.

**Gesetz von Ampère-Maxwell**  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

Wir integrieren die vierte Maxwell-Gleichung  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$  über eine beliebige Fläche S ...

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

und erhalten für die linke und die rechte Seite der Gleichung ...

$$\text{LS} \quad \int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\text{RS} \quad \int_S \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \left( \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \right) = \mu_0 I_S + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \phi_{E,S}$$

wobei wir definiert haben ...

$$I_S = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \text{Strom durch Fläche S}$$

$$\phi_{E,S} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \text{Fluss des elektrischen Feldes durch S}$$

Wir können somit zusammenfassen ...

$$(3)' \quad \oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left( \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \right) = \mu_0 I_S + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \phi_{E,S}$$

Wir werden dies im Kapitel "Elektrodynamik" noch vertiefen.

## Maxwell-Gleichungen mit $\vec{E}$ , $\vec{D}$ , $\vec{B}$ und $\vec{H}$

### Maxwell-Gleichungen

Die mikroskopischen Maxwell-Gleichungen werden mit dem elektrischen Feldstärkefeld  $\vec{E}$  und dem magnetischen Flussdichtefeld  $\vec{B}$  formuliert.

Wir können das elektrische Feld  $\vec{E}$  aufteilen in ein Feld verursacht durch die (im Molekül oder Atom) **gebundenen Ladungen** ( $\vec{P}$ ) und eines verursacht durch die **freie Ladungen** ( $\vec{D}$ ) ...

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E}$$

und das magnetische Feld  $\vec{B}$  aufteilen in ein Feld verursacht durch die (im Molekül oder Atom) **gebundenen Ströme** (magnetische Polarisation  $\vec{J}$  oder Magnetisierung  $\vec{M}$ ) und durch die **freien Ströme** ( $\vec{H}$ ) ...

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J} = \mu \vec{H}$$

Die obigen Beziehungen gelten für den einfachen Fall von linearen Beziehungen. Nichtlinearitäten werden nicht berücksichtigt. Die Felder  $\vec{D}$  und  $\vec{E}$  sowie  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$  werden somit als parallel zueinander vorausgesetzt.

Die Maxwell-Gleichungen können dann folgendermassen umgeschrieben werden ...

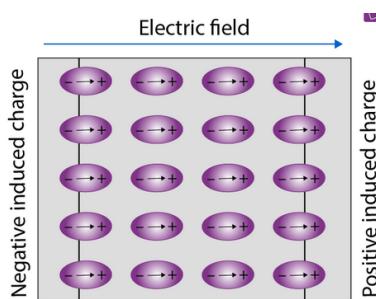
(1)"	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{frei}}$	Gauss Gesetz
(2)"	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	Gauss Gesetz für Magnetismus
(3)"	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Faraday Gesetz
(4)"	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_{\text{frei}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	Ampère-Maxwell Gesetz

Die zweite und dritte Maxwell-Gleichung sind unverändert. Bei den anderen zwei, in denen die Ladungen und Stromdichten vorkommen, werden die Felder  $\vec{D}$  und  $\vec{H}$  mit den freien Ladungen und Strömen verwendet.

## Polarisation ( $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ )

### Dielektrische Polarisation im Dielektrikum (Nichtleiter)

Wenn sich ein dielektrisches Material in einem elektrischen Feld befindet ...



**Abbildung** Mikroskopische Dipole  $\rightarrow$  Polarisation  $\vec{P}$

dann ...

- wirkt auf die positiven Ladungen (Atomkerne) eine Kraft in Richtung des elektrischen Feldes und
- auf die negativen Ladungen (Elektronen) eine Kraft in Gegenrichtung.
- Das Material wird polarisiert.
  - Das von den Dipolen erzeugte Feld zeigt in Gegenrichtung zum vorhandenen elektrischen Feld. Das lokale elektrische Feld  $\vec{E}$  wird deshalb reduziert.
  - Die kleinen Dipole zeigen in die gleiche Richtung wie das elektrische Feld, da sie so definiert sind, dass sie von der negativen Ladung zur positiven Ladung zeigen.
  - Dies wird beschrieben durch die Polarisation  $\vec{P}$ , die von den gebundenen Ladungen erzeugt wird und in die gleiche Richtung wie das elektrische Feld zeigt.
- Das elektrische Flussdichte-Vektorfeld  $\vec{D}$  enthält nur das von den freien Ladungen stammende elektrische Feld.

$$\rho_{\text{frei}} = \rho - \rho_{\text{gebunden}} = \rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

- Bei linearen Materialien (isotrop oder kubische Struktur) gilt  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$
- In komplizierteren Situationen wird die Beziehung zwischen der Polarisation  $\vec{P}$  und der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$  durch Tensoren oder nichtlineare Terme wie  $\vec{E}^2$  beschrieben.

Mit Hilfe der folgenden Definitionen ...

(1) <b>Elektrische Flussdichte <math>\vec{D}</math></b>	$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$	$[D] = \frac{C}{m^2}$
(2) <b>elektrische Suszeptibilität <math>\chi_e</math></b>	$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$	$[\chi_e] = 1$
(3) <b>Permittivitätszahl <math>\epsilon_r</math></b>	$\epsilon_r = 1 + \chi_e$	$[\epsilon_r] = 1$
(4) <b>Permittivität <math>\epsilon</math></b>	$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$	$[\epsilon] = [\epsilon_0] = \frac{C}{Vm}$

kommen wir auf die folgenden Schlussfolgerungen. Im Vakuum gilt per definitionem die Beziehung ...

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

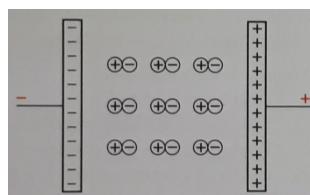
Durch Einbringen des Stoffs entsteht eine zusätzliche elektrische Flussdichte. Sie heisst **elektrische Polarisation  $\vec{P}$** .

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad [D] = [P] = \frac{C}{m^2}$$

Mit den obenstehenden Definitionen können wir umformen ...

$$\vec{D} \stackrel{(1)}{=} \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \stackrel{(2)}{=} \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \stackrel{(3)}{=} \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \stackrel{(4)}{=} \epsilon \vec{E}$$

Wir können diese Polarisation auch an Hand eines Kondensators illustrieren.



**Abbildung** Polarisation in einem Kondensator

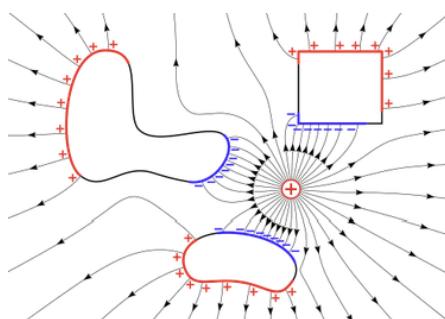
Wir stellen fest ...

- Die freien Ladungen an den beiden Platten erzeugen das  $\vec{D}$ -Feld.
- Dies führt zu einer Polarisation (in Gegenrichtung).
- Das  $E$ -Feld wird reduziert (im Vergleich zu ohne das Dielektrikum)

### Influenz in einem Leiter

Wenn sich ein Leiter in einem elektrischen Feld befindet (Link) ...

- verschieben sich die freien Ladungsträger (Elektronen) auf der Oberfläche so lange, bis auf die frei beweglichen Ladungsträger keine Kraft mehr wirkt. Dies nennt man **Influenz**.
- Das heisst, dass das ursprüngliche elektrische Feld durch das Feld der verschobenen Ladungen vollständig kompensiert wird und der Raum feldfrei wird. Dies nennt man einen **Faray'schen Käfig** (Link).
- Diese Verschiebungen führen zu ortsabhängigen Ladungsdichten.
- Die festsitzenden Atomkerne werden davon nicht beeinflusst.
- Wir haben gesehen: In und auf einem Nichtleiter können keine Ladungen verschoben werden, jedoch werden die vorhandenen Atome bzw. Moleküle polarisiert. Dies nennt man dielektrische Polarisation.



**Abbildung** Durch Influenz wird im Leiter das elektrische Feld gleich 0 (Link)

Im **Elektroskop** werden die mit der Influenz einhergehenden mechanischen Kräfte zur Messung der elektrischen Aufladung von Gegenständen bzw. zur stromlosen Spannungsmessung verwendet.

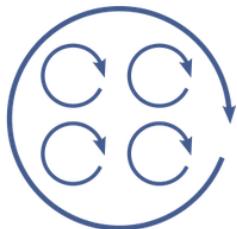
## Halbleiter

Halbleiter werden wir beim Vortrag/Skript über "Festkörper" behandeln.

## Magnetisierung ( $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ )

### Einleitung

Analog zur Polarisation, wo wir zwischen gebundenen Ladungen und freien Ladungen unterschieden haben, können wir hier zwischen makroskopischen und mikroskopischen Kreisströmen unterscheiden.



**Abbildung** Mikroskopische Kreisströme  $\rightarrow$  Magnetisierung  $\vec{M}$

Im Vakuum gilt die Beziehung ...

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Durch Einbringen des Stoffs entsteht eine zusätzliche magnetische Flussdichte. Sie heisst **magnetische Polarisation  $\vec{J}$** .

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J}$$

$$[J] = [B] = T = \frac{Vs}{m^2}$$

Mit den untenstehenden Definitionen können wir umformen ...

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0 \vec{H} + \vec{J} \stackrel{(1)}{=} \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \stackrel{(2)}{=} \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) \\ &= \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \stackrel{(3)}{=} \mu_0 \mu_r \vec{H} \stackrel{(4)}{=} \mu \vec{H} \end{aligned}$$

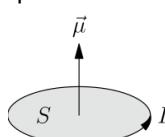
Für paramagnetische und diamagnetische Stoffe gilt die Beziehung  $\vec{B} = \mu \vec{H}$

Dabei haben wir die folgenden Definitionen gebraucht ...

- |  |                                     |                                   |
|--|-------------------------------------|-----------------------------------|
| (1) <b>Magnetisierung <math>\vec{M}</math></b>             | $\vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \vec{J}$ | $[M] = [H] = \frac{A}{m}$         |
| (2) <b>magnetische Suszeptibilität <math>\chi_m</math></b> | $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$          |                                   |
| (3) <b>Permeabilitätszahl <math>\mu_r</math></b>           | $\mu_r = 1 + \chi_m$                | $[\mu_r] = 1$                     |
| (4) <b>Permeabilität <math>\mu</math></b>                  | $\mu = \mu_r \mu_0$                 | $[\mu] = [\mu_0] = \frac{Vs}{Am}$ |

Bemerkungen

- Die Magnetisierung  $\vec{M}$  ist eine physikalische Grösse zur Charakterisierung des magnetischen Zustands eines Materials. Sie ist ein Vektorfeld, das die Dichte von permanenten oder induzierten magnetischen Dipolen (Kreisströmen) in einem magnetischen Material beschreibt und berechnet sich als das magnetische Moment  $\vec{m}$  pro Volumen  $V$ : d.h.  $\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$ .

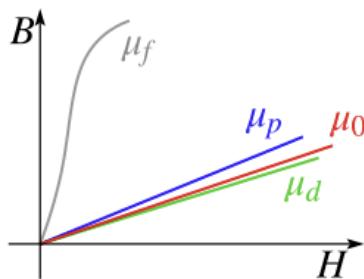


Link,  $m = \mu = I * S$

- Die Permeabilitätszahl  $\mu_r$  gibt das Verhältnis der magnetischen Flussdichte  $B$  mit und ohne Stoff im Magnetfeld an, also den Faktor, um den sich die magnetische Flussdichte  $B$  durch Einbringen von Stoff vergrössert oder verkleinert:  $\frac{B}{\mu_0 H} = \mu_r$
- Die obige Beziehung gilt, wenn  $\vec{M}$  und  $\vec{H}$  linear voneinander abhängen, nicht jedoch bei Nichtlinearitäten oder wenn  $\vec{M}$  und  $\vec{H}$  unterschiedliche Richtungen haben (dann wird die Beziehung durch Tensoren beschrieben). Sie gilt also insbesondere nicht bei Ferromagneten.
- Jede Magnetisierung kommt durch die Ausrichtung von Elementarmagneten zustande. Da ein Körper nur endliche viele Elementarmagnete enthält, gibt es eine **Sättigungsmagnetisierung**, die auch in einem beliebig starken äusseren Feld nicht überschritten werden kann.

Wir können zwischen drei Situationen unterscheiden. Stoffe mit ...

- $\mu < \mu_0$  bzw.  $\chi_m < 0$  sind sogenannte **diamagnetische** Stoffe und **schwächen** das Feld geringfügig. Beispiele sind Silber, Kupfer, Bismut.
- $\mu > \mu_0$  bzw.  $\chi_m > 0$  sind sogenannte **paramagnetische** Stoffe und **stärken** das Feld geringfügig. Beispiele sind Platin, Aluminium und Luft.
- $\mu \gg \mu_0$  bzw.  $\chi_m \gg 1$  sind sogenannte **ferromagnetische** Stoffe und **stärken** das Feld **erheblich**. Beispiele sind Eisen, Cobalt und Nickel.



**Abbildung** Vereinfachter Vergleich der magnetischen Flussdichten für ferromagnetische  $\mu_f$ , paramagnetische  $\mu_p$  und diamagnetische  $\mu_d$  Stoffe zu Vakuum  $\mu_0$ . (Link)

Wir gehen im Folgenden etwas näher auf dieses unterschiedliche Verhalten ein.

### Diamagnetismus

Jedes Material ist diamagnetisch. Weil die diamagnetischen Effekte jedoch schwächer als der Paramagnetismus und um Größenordnungen schwächer als der Ferromagnetismus sind, treten sie nur bei Materialien in Erscheinung, die weder para- noch ferromagnetisch sind. Man bezeichnet solche Stoffe dann als diamagnetische Stoffe.

Diamagnetische Materialien entwickeln in einem externen Magnetfeld ein induziertes Magnetfeld in einer Richtung, die dem äusseren Magnetfeld entgegengesetzt ist. Ohne äusseres Magnetfeld haben diamagnetische Materialien kein eigenes Magnetfeld, sie sind nicht magnetisch.

Für diamagnetische Materialien ist die magnetische Suszeptibilität deshalb kleiner als 0 ...

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \chi_m < 0$$

Das bedeutet, dass diamagnetische Materialien von Magnetfeldern abgestossen werden. Der Effekt ist jedoch so klein, dass er im täglichen Leben nicht beobachtet werden kann.

### Paramagnetismus

Wenn paramagnetische Stoffe (Link) in ein Magnetfeld  $\vec{H}$  gegeben werden, dann folgt die Magnetisierung  $\vec{M}$  ...

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \chi_m > 0$$

dem äusseren Feld (d.h.  $\chi_m > 0$ ), so dass das Magnetfeld im Stoff grösser ist als ausserhalb. Alle Stoffe, deren magnetische Suszeptibilität grösser als 0 ist und die keine bleibende magnetische Ordnung haben (wenn das Magnetfeld entfernt wird), werden als paramagnetisch bezeichnet.

Die Ursache eines paramagnetischen Verhaltens liegt in der Ausrichtung der mikroskopischen magnetischen Momente eines Stoffes in einem Magnetfeld. Die einzelnen magnetischen Momente sind dabei voneinander unabhängig. Nach Abschalten des Magnetfelds wird die Ausrichtung auf Grund von thermischen Bewegungen wieder verschwinden (im Gegensatz zu einem Ferromagneten).

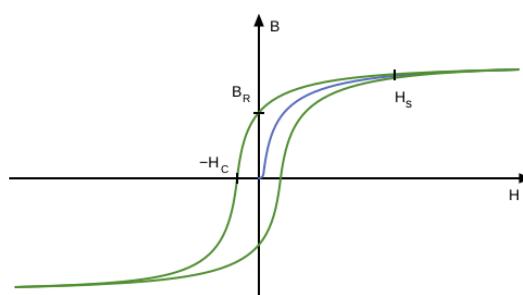


**Abbildung** Ausrichtung der Elementarmagnete

- a) ohne Magnetfeld gibt es eine zufällige Ausrichtung
- b) mit starkem Magnetfeld richten sich viele parallel zum Magnetfeld aus

### Ferromagnetismus

Bei Ferromagneten (Link) gilt die lineare Beziehung  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  nicht. Es gilt ein komplizierteres Verhalten, das mit Hilfe der Magnetisierungskurven anschaulich dargestellt werden kann ...



**Abbildung** Typische Hysteresekurve für ferromagnetische Stoffe.

#### Bemerkungen

- Wir starten bei  $H = 0$ . Das Material sei nicht magnetisiert, d.h.  $B = 0$ .
- Eine Vergrösserung der magnetischen Feldstärke  $H$  führt als Folge der magnetischen Polarisation zunächst zu einem Ansteigen der  $B[H]$  Kurve, bis die magnetische Polarisation  $J$  einen Sättigungswert erreicht ( $H_s$  in der Abbildung).
- Danach verläuft die Kurve flach.
- Wenn die Feldstärke  $H$  wieder reduziert wird, erreicht die Flussdichte  $B$  bei  $H = 0$  den Wert  $B_R$ , die sogenannte **Remanenz**.
- Wenn  $H$  weiter reduziert wird, ist bei einer bestimmten Feldstärke  $-H_c$ , der sogenannten **Koerzitivfeldstärke**, die Flussdichte  $B$  gleich 0.
- Weitere Reduktion führt zu einer weiteren Sättigung.
- Wenn das Feld  $H$  dann wieder erhöht wird, durchläuft die Kurve bei  $H = 0$  den Wert  $-B_R$ , ist also nicht gleich 0 (wie am Anfang).
- Und bei  $H = H_c$  wird wieder  $B = 0$  erreicht.
- Bei weiterer Erhöhung von  $H$  wird wieder die Sättigung erreicht.

Ein Material wird als ein ferromagnetischer Stoff eingestuft oder deklariert, wenn sich darin unterhalb der **Curie-Temperatur** die magnetischen Momente der Atome parallel ausrichten.

Diese Tendenz der Elementarmagnete, sich parallel auszurichten, führt zu einer spontanen Magnetisierung von grösseren Bereichen, den **weiss'schen Bezirken**, in denen die Elementarmagnete grösstenteils parallel ausgerichtet sind. Das unterscheidet Ferromagneten von Paramagneten, bei denen die magnetischen Momente normalerweise ungeordnet sind.

# Folgerungen aus den Maxwell-Gleichungen

## Einleitung

Wir haben im letzten Kapitel die Maxwell-Gleichungen von der Differentialform durch Integrationen in die Integralform umgeformt. Dabei haben wir schon wichtige Erkenntnisse gewonnen ...

- Gauss' Gesetz

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{inside}}$$

- Der elektrische Fluss durch eine geschlossene Fläche ist bestimmt durch die Ladung, die sich im von der Fläche eingeschlossenen Volumen befindet.
- Elektrische Feldlinien starten bei positiven Ladungen und enden bei negativen Ladungen.

- Gauss' Gesetz für Magnetfelder

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

- Der magnetische Fluss durch eine geschlossene Fläche ist Null.
- Magnetische Feldlinien sind geschlossene Kurven.
- Es gibt keine magnetischen Monopole.

- Gesetz von Faraday

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{L} = -\frac{d}{dt} \Phi_{E,S}$$

- Das Induktionsgesetz: Eine Änderung des magnetischen Flusses durch eine Fläche S induziert ein elektrisches Feld entlang des Rands der Fläche und somit einen Strom bei einem Leiter.

- Gesetz von Ampère-Maxwell

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{L} = \mu_0 I_S + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \Phi_{B,S}$$

- Ein Magnetfeld entlang des Rands einer Fläche geht einher mit einem Strom durch diese Fläche und einer Änderung des elektrischen Fluss' durch diese Fläche.

Wir können aus den Maxwell-Gleichungen noch weitere Schlussfolgerungen ziehen wie ...

- Herleitung der Coulomb-Kraft
- Herleitung der Ladungserhaltung
- Herleitung von elektromagnetischen Wellen

## Coulomb-Kraft

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2}$$

Die Maxwell-Gleichung (1)'...

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{inside}}$$

lässt sich auch dazu verwenden, das elektrische Feld um eine positive Punktladung Q zu bestimmen.

Wir betrachten als Volumen eine Kugel mit dem Radius r symmetrisch um diese Punktladung. Die Oberfläche der Kugel ist gleich  $4\pi r^2$  und der Feldstärkevektor hat auf der ganzen Oberfläche den gleichen Betrag E und zeigt nach aussen. Das ergibt ...

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 * E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Wenn wir nun eine Probeladung q an der Oberfläche positionieren, erhalten wir auf Grund der Lorentz-Kraft  $\vec{F} = q \vec{E}$  ...

- für eine positive Probeladung eine Kraft nach aussen.
- für eine negative Probeladung eine Kraft nach innen.

und betragsmässig die Kraft zwischen zwei Punktladungen, die sogenannte **Coulomb-Kraft** ...

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2}$$

## Bemerkungen

- Die Coulomb-Kraft ist proportional zu den beiden Ladungen.
- Die Coulomb-Kraft ist umgekehrt proportional zum Abstand zwischen den Ladungen im Quadrat.
- Ladungen mit gleichem Vorzeichen stoßen sich ab.
- Ladungen mit ungleichem Vorzeichen ziehen sich an.
- Die Formel für die Coulomb-Kraft gilt auch für zwei symmetrisch um einen Punkt verteilte Ladungen.

## Vergleich der Coulomb-Kraft mit der Gravitationskraft

Die Coulombkraft zwischen zwei Ladungen bzw. geladenen Teilchen hat die gleiche Struktur wie die Gravitationskraft  $F_G$  zwischen zwei Massen ...

$$F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Die beiden Kräfte haben die folgenden Ähnlichkeiten ...

- Die Abhängigkeit vom Abstand  $r$  ist gleich (proportional zu  $\frac{1}{r^2}$ ).
- Die Kraft wird erst für  $r = \infty$  gleich Null.
- Die Abhängigkeit von den Massen bzw. den Ladungen ist analog (proportional zum Produkt  $m_1 * m_2$  bzw. zu  $q_1 * q_2$ ).

Und sie haben die folgenden Unterschiede ...

- Die Gravitationskraft ist immer anziehend.
- Die Coulombkraft kann sowohl anziehend als auch abstoßend sein.
- Die Ursache der Gravitationskraft sind die Massen, die Ursache für die Coulombkraft sind die Ladungen.
- Die Coulombkraft lässt sich abschirmen, die Gravitationskraft nicht.
- In einem abgeschlossenen System bleibt die Ladung erhalten, die Masse jedoch nicht (z.B. bei der Kernspaltung).
- Die Coulomb-Kraft ist viel stärker als die Gravitationskraft. Wenn wir die Gravitationskraft  $F_G$  zwischen einem Protonen und einem Elektron mit der Coulombkraft  $F_C$  zwischen diesen beiden Teilchen vergleichen ...

$$\begin{aligned} \frac{F_G}{F_C} &= \frac{G \frac{m_{\text{Elektron}} m_{\text{Proton}}}{r^2}}{\frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_{\text{Elektron}} q_{\text{Proton}}}{r^2}} = G * 4 \pi \epsilon_0 * \frac{m_{\text{Elektron}} m_{\text{Proton}}}{q_{\text{Elektron}} q_{\text{Proton}}} \\ &\approx 6.674 * 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} * 4 \pi * 8.85 * 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} * \frac{9.11 * 10^{-31} \text{kg} * 1.67 * 10^{-27} \text{kg}}{(1.602 * 10^{-19} \text{C})^2} \approx 4.40 * 10^{-40} \end{aligned}$$

Bei kleinen Massen wie z.B. in einem Atom, einem Molekül oder in einem Festkörper ist die Coulombkraft die bei weitem dominierende Kraft.

Erst bei grossen ungefähr neutralen Massen (beispielsweise Erde, Sonne, Galaxien, ...), bei denen sich die anziehenden und abstoßenden Coulombkräfte zwischen positiven Atomkernen und negativen Elektronenhüllen mehr oder weniger kompensieren, ist die Gravitationskraft dominant.

## Ladungserhaltung

$$\frac{d}{dt} Q = -I_{\partial V, \text{out}}$$

Die **Ladungserhaltung** folgt direkt aus der vierten Maxwell-Gleichung (4) ...

$$(4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Wenn wir auf beiden Seiten dieser Gleichung den Operator  $\vec{\nabla}$  anwenden und die für alle Felder  $\vec{F}$  geltende Vektor-Identität (siehe Anhang C) ...

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$$

$$\text{d.h. div}[\text{rot}[\vec{F}]] = 0$$

benutzen, erhalten wir ...

$$\text{LS} \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$$

$$\text{RS} \quad \vec{\nabla} \cdot \left( \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right) = \mu_0 \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \right) = \mu_0 \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \rho \right)$$

Gleichsetzen liefert ...

$$\mu_0 \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \rho \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

Integrieren über ein beliebiges Volumen  $V$  ergibt sich für die linke und die rechte Seite der Gleichung ...

$$\text{LS} \quad \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \, dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = \frac{d}{dt} Q$$

$$\text{RS} \quad - \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) \, dV \stackrel{\text{Gauss}}{=} - \oint_{\partial V} \vec{j} \cdot \vec{dS} = - I_{\partial V, \text{out}}$$

Zusammengenommen ...

$$\frac{d}{dt} Q = - I_{\partial V, \text{out}}$$

Die Zunahme der Ladung innerhalb des Volumens ist gleich dem Strom, der über die geschlossene Oberfläche in das Volumen hineinströmt. Dies bedeutet, dass keine Ladung verloren geht (sich in Nichts auflöst). Mit anderen Worten: Es gilt die **Ladungserhaltung**.

$$\text{Wellengleichung} \quad \Delta \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad \Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

## Maxwell-Gleichung im Vakuum

Die Maxwell-Gleichungen im Vakuum (d.h. Ladungsdichte und Stromdichte sind gleich null) ...

$$(1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{da } \rho = 0$$

$$(2) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$(3) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{da } \vec{j} = \vec{0}$$

beschreiben auch die Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle. Dies können wir folgendermassen zeigen.

## Wellengleichung für das magnetische Feld

Wir starten mit der vierten Maxwell-Gleichung im Vakuum (d.h. ohne Ladungen) ...

$$(4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

und wenden den Rotationsoperator (d.h.  $\vec{\nabla} \times \square$ ) auf beide Seiten dieser Gleichung an ...

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Wir benutzen die folgende Vektoridentität ...

$$(A) \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \Delta \vec{F} \quad \text{rot[rot] = grad[div] - Laplace}$$

die für jedes Feld  $\vec{F}$  gilt, und wenden diese Vektor-Identität auf die linke Seite der obigen Gleichung an und erhalten mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen (2) und (3) ...

$$\begin{aligned}
 \text{LS} \quad & \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \stackrel{(A)}{=} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B} \stackrel{(2)}{=} \vec{\nabla}(0) - \Delta \vec{B} \stackrel{\vec{\nabla}(0)=\vec{0}}{=} -\Delta \vec{B} \\
 \text{RS} \quad & \vec{\nabla} \times \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \times \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \stackrel{\text{Ableitungen vertauschen}}{=} \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{\nabla} \times \vec{E} \right) \stackrel{(3)}{=} \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

Gleichsetzen von LS und RS ergibt ...

$$\begin{aligned}
 -\Delta \vec{B} &= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \\
 \rightarrow \quad & \Delta \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0
 \end{aligned}$$

Dies ist eine **Wellengleichung** für das magnetische Feld.

## Wellengleichung für das elektrische Feld

Analog können wir die Wellengleichung auch für das elektrische Feld herleiten. Wir starten mit der dritten Maxwell-Gleichung ...

$$(3) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

und wenden den Rotationsoperator (d.h.  $\vec{\nabla} \times \square$ ) auf diese Gleichung an ...

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \times \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

Wir benutzen wieder die Vektoridentität ...

$$(A) \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \Delta \vec{F} \quad \text{rot[rot] = grad[div] - Laplace}$$

und wenden sie auf die linke Seite der obigen Gleichung an und erhalten mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen (1) und (4) ...

$$\begin{aligned}
 \text{LS} \quad & \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \stackrel{(A)}{=} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} \stackrel{(1)}{=} \vec{\nabla}(0) - \Delta \vec{E} \stackrel{\vec{\nabla}(0)=\vec{0}}{=} -\Delta \vec{E} \\
 \text{RS} \quad & \vec{\nabla} \times \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \stackrel{\text{Ableitungen vertauschen}}{=} -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \stackrel{(4)}{=} -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

Gleichsetzen von LS und RS ergibt ...

$$\begin{aligned}
 -\Delta \vec{E} &= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\
 \rightarrow \quad & \Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0
 \end{aligned}$$

Dies ist eine **Wellengleichung** für das elektrische Feld.

## Folgerung

Aus dem Skript "Wellen" können wir entnehmen, dass ...

$$\mu_0 \epsilon_0 = c^2$$

und dass  $\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  der Ausbreitungsgeschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen entspricht. Es stellt sich heraus, dass dieser Ausdruck gleich gross wie die Lichtgeschwindigkeit ist.

Mit anderen Worten ...

**Licht ist eine elektromagnetische Welle.**

Elektrische und magnetische Wellen können sich gemeinsam mit der Lichtgeschwindigkeit ausbreiten.

# Elektrostatik

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \times \vec{E} = \vec{0}$$

## Einleitung

Nachdem wir im letzten Kapitel ausführlich die Maxwell Gleichungen erläutert haben, wenden wir uns nun der Elektrostatik (Link) zu. Elektrostatik ist der Teilbereich der Elektrodynamik, der sich mit ruhenden Ladungen und Ladungsverteilungen sowie zeitlich unveränderlichen Feldern beschäftigt. Die relevanten Maxwell-Gleichungen reduzieren sich (da wir die Ableitungen nach der Zeit streichen) auf ...

(1)	$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{dS} = Q_{\text{inside}}$
(2)	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0$
(3)	$\nabla \times \vec{E} = 0$	$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \vec{ds} = 0$
(4)	$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J})$	$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot \vec{ds} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \vec{dS} = \mu_0 I_S$

Das elektrische Feld und das magnetische Feld sind nun **entkoppelt**. Die Gleichungen (1) und (3) beinhalten nur das elektrische Feld. Die Gleichungen (2) und (4) beinhalten nur das Magnetfeld.

In der Elektrostatik interessiert uns nur das elektrische Feld. Das heisst wir haben es nur mit zwei Gleichungen zu tun ...

(1)	$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{dS} = Q_{\text{inside}}$
(3)	$\nabla \times \vec{E} = 0$	$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \vec{ds} = 0$

Die Aufgabe besteht nun, das elektrische Feld aus einer gegebenen Ladungsverteilung zu berechnen.

## Elektrisches Feld um Ladungen

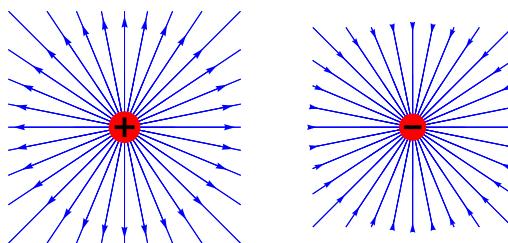
Wir starten mit dem Gauss'schen Gesetz in Integralform ...

$$(1)' \quad \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{dS} = Q_{\text{inside}}$$

und wenden es für einige symmetrische Situationen an.

### Elektrisches Feld um eine Punktladung

Wir untersuchen zunächst das elektrische Feld um eine positive bzw. eine negative Punktladung.



**Abbildung** Elektrisches Feld um eine positive bzw. negative Punktladung.  
Schnitt durch die "Punkt"ladung.

Wir legen eine Kugel symmetrisch um eine Punktladung. Aus Symmetriegründen ist die elektrische Feldstärke  $E$  auf der ganzen Kugeloberfläche gleich und (da  $\vec{dS}$  nach aussen zeigt) ist der Feldstärkevektor ...

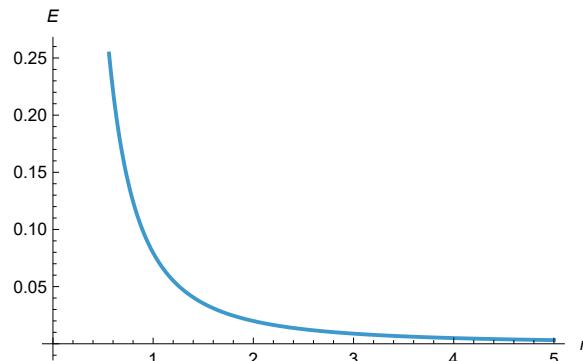
- für eine positive Ladung nach aussen und
- für eine negative Ladung nach innen gerichtet.

Damit gilt **betragsmässig** ...

$$4\pi r^2 E = Q \quad \rightarrow \quad E[\vec{x}] = \frac{Q}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}_p|^2}$$

$\vec{x}$  Position des Beobachters  
 $\vec{x}_p$  Position der Punktquelle

Das Feld nimmt umgekehrt proportional zum Abstand im Quadrat ab.



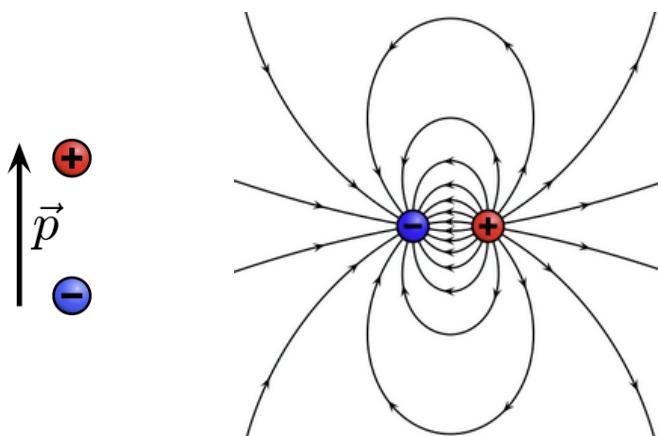
**Vektoriell** geschrieben lautet die Formel ...

$$\vec{E}[\vec{x}] = \frac{Q}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}_p|^3} * (\vec{x} - \vec{x}_p)$$

## Elektrisches Feld bei einem Dipol

Als nächstes untersuchen wir das elektrische Feld um einen Dipol (Link). Ein elektrischer Dipol ist die Anordnung zweier entgegengesetzter elektrischer Ladungen. Da sich die entgegengesetzten Ladungen  $\pm q$  gegenseitig kompensieren, hat der Dipol insgesamt die Ladung 0.

Der Dipol wird charakterisiert durch den Betrag der entgegengesetzten Ladungen und den Abstandsvektor  $\vec{d}$ , der von der negativen Ladung zur positiven Ladung zeigt.



**Abbildung** a) Ein Dipol mit dem Dipolmoment  $\vec{p}$ .  
 b) Elektrisches Feld um einen Dipol.

Das sogenannte **Dipolmoment** ist definiert als ...

$$\vec{p} = q \vec{d} \quad [p] = \text{C m}$$

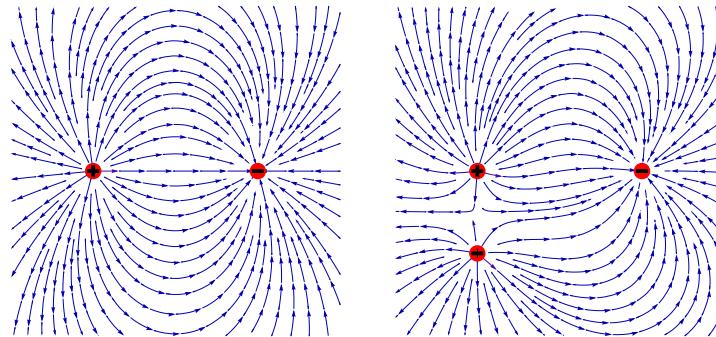
Zur Bestimmung des elektrischen Feldes um diese beiden Ladungen können wir das **Superpositionssprinzip** verwenden.

## Elektrisches Feld bei mehreren Punktladungen

Da das Superpositionsprinzip gilt, können wir bei mehreren Punktladungen die einzelnen Felder addieren. Es ergibt sich bei  $N$  Punktladungen das folgende elektrische Feld ...

$$\vec{E}[\vec{x}] = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{4\pi \epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}_i|^3} * (\vec{x} - \vec{x}_i)$$

Beispiel bei zwei und drei Punktladungen ...



**Abbildung** Elektrisches Feld von zwei bzw. drei Ladungen

Wenn wir Ladungsverteilungen (statt Punktladungen) haben, müssen wir über die Ladungsverteilung integrieren (statt über die Punktladungen summieren).

## Elektrisches Potenzial ( $\varphi$ ) und Poisson-Gleichung ( $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ )

Wenn wir kompliziertere Situationen und Randbedingungen haben, eignet sich eine andere Vorgehensweise besser, nämlich die Bestimmung des sogenannten elektrischen Potenzials. Dies geht folgendermassen.

Wir müssen eine Lösung für  $\vec{E}$  finden, die die beiden Maxwell-Gleichungen ...

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

erfüllt.

Wir verwenden als ersten Schritt das mathematische Theorem, das für jedes skalare Feld  $F[x, y, z]$  gilt ...

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} F) \stackrel{\text{immer}}{=} \vec{0} \quad \text{d.h.} \quad \text{rot[grad]} = 0$$

Wir machen deshalb den folgenden Ansatz für ein zu bestimmendes skalares Feld, das **elektrische Potenzial  $\varphi$**  ...

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$$

Mit diesem Ansatz ist die Maxwell-Gleichung (3) automatisch erfüllt. Für die Maxwell-Gleichung (1) folgt dann mit Hilfe der Identität (wobei  $\Delta$  der Laplace-Operator ist) ...

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} F) = \vec{\nabla}^2 F = \Delta F \quad \text{d.h.} \quad \text{div[grad]} = \text{Laplace}$$

die folgende Beziehung ...

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} \stackrel{(1)}{=} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} \varphi) = -\vec{\nabla}^2 \varphi = -\Delta \varphi$$

Die Aufgabe in der Elektrostatik besteht deshalb darin, die folgende sogenannte **Poisson-Gleichung** zu lösen, um das skalare Feld  $\varphi$  zu bestimmen.

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Bei komplizierteren Geometrien und Randbedingungen muss die Berechnung mit Hilfe des Computers durchgeführt werden.

Das Potenzial ist nur bis auf eine additive Konstante definiert. Diese Konstante hat keine physikalische Bedeutung. Es können nur Energiedifferenzen gemessen werden. Vielfach wird  $\varphi$  so gewählt, dass das Potenzial im  $\infty$  gleich 0 ist.

## Definition der elektrischen Spannung ( $U$ )

Das dritte Maxwell-Gesetz lautet in Integralform ...

$$(3)' \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Das heisst: auf jeder geschlossenen Kurve (sogenannte Zirkulation) ist das Integral gleich 0.

Das heisst auch, dass der Ausdruck ...

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

vom Weg unabhängig ist. Da ...

$$F = -q E$$

ist und für die infinitesimale Arbeit ...

$$dW = F ds = -q E ds$$

gilt, ist die Arbeit, die geleistet werden muss, um die Ladung  $q$  von A nach B zu bringen, vom Weg unabhängig. Entscheidend sind nur der Startpunkt und der Endpunkt (wie bei Energien üblich kann auch der Nullpunkt des elektrischen Potenzials beliebig gewählt werden) ...

$$W_{AB} = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = q \int_A^B \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{s} = q(\varphi[B] - \varphi[A])$$

Diese Gleichung (dividiert durch  $q$ ) wird auch zur Definition der **elektrischen Spannung** benutzt ...

$$U = \varphi[B] - \varphi[A] = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{W_{AB}}{q} \quad [U] = \frac{J}{C}$$

Die **elektrische Spannung  $U$**  ist die Arbeit pro Ladung, die notwendig ist, um eine Ladung von A nach B zu transportieren.

## Definition der Energieeinheit (eV)

Die physikalische Grösse Energie kann in verschiedenen wichtigen Einheiten ausgedrückt werden.

- In der Mechanik ist die Einheit **Joule** (J) gebräuchlich.
- In der Wärmelehre ist die Einheit **Kilocalorie** (kcal) weit verbreitet. Von SI nicht empfohlen.
- In der Elektrizitätslehre ist die Einheit **Kilowattstunde** (kWh) verbreitet.
- In der Teilchen-, Atomphysik usw. wird die Einheit **Elektronenvolt** (eV, Link) benutzt.

Die Einheit Elektronenvolt haben wir noch nicht besprochen. Wie ist sie definiert?

Das **Elektronvolt** ist definiert als die kinetische Energie, die ein Elektron (eine Elementarladung) beim Durchlaufen einer Beschleunigungsspannung von 1 Volt gewinnt.

Es ist somit gleich dem Produkt aus der Elementarladung  $e$  und der Einheit Volt (V).

$$1 \text{ eV} = q_{\text{Elektron}} * V \stackrel{\text{exakt}}{=} 1.602176634 * 10^{-19} \text{ C} * \text{V} = 1.602176634 * 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ eV} = 1.602176634 * 10^{-19} \text{ J}$$

Die Umrechnung in die SI-Einheit Joule ist demzufolge (Darstellung mittels Multiplikation mit 1) ...

$$1 = \frac{1.602176634 * 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} = \frac{6.24151 * 10^{18} \text{ eV}}{1 \text{ J}} \approx \frac{4.18684 \text{ J}}{\text{cal}_{\text{int}}}$$

Ein Elektron hat die Ruheenergie ...

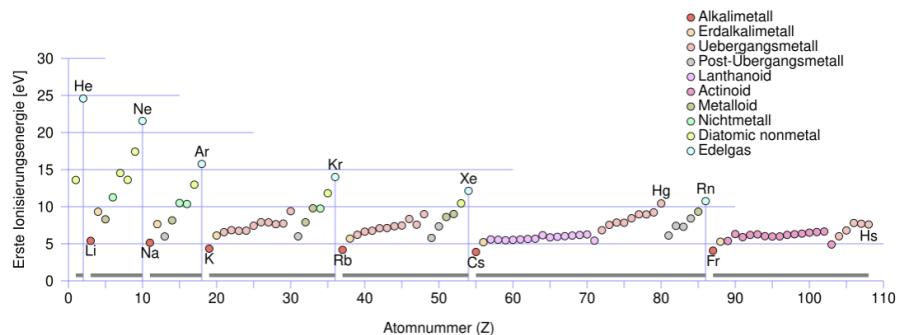
$$E_{\text{Elektron}} = 0.511 \text{ MeV}$$

Die Energien von Teilchen werden häufig (dank der Formel  $E = mc^2$ ) auf die folgende Art eingegeben ...

$$m_{\text{Elektron}} = \frac{E_{\text{Elektron}}}{c^2} = \frac{0.511 \text{ MeV}}{c^2} = 0.511 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

Die Masseneinheit ist hier  $\frac{\text{MeV}}{c^2}$ .

Die Ionisierungsenergien (Bindungsenergien) von Atomen befinden sich auch in der Größenordnung Elektronenvolt.



**Abbildung** Ionisierungsenergie in Abhängigkeit der Ordnungszahl (Link).

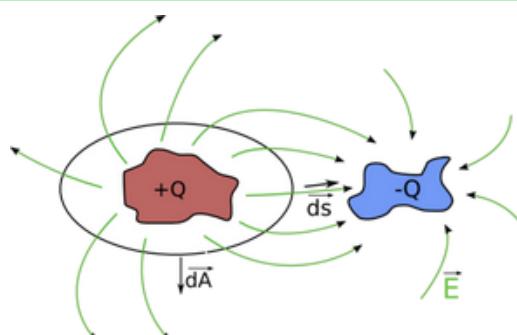
## Definition der Kapazität ( $C$ )

Wenn eine Ladung  $Q$  vom Punkt A zum Punkt B transportiert wird, dann bildet sich ein elektrisches Feld bzw. eine Spannung ( $U = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$ ) zwischen diesen Punkten. Die transportierte Ladung  $Q$  und die entstehende Spannung  $U$  sind proportional zueinander ...

$$Q = C U \quad [C] = \text{Farad (F)}$$

Die Proportionalitätskonstante ist die sogenannte **elektrische Kapazität  $C$** .

Die elektrische Kapazität  $C$  ist die Fähigkeit eines Körpers, elektrische Ladung zu speichern, und ist das Verhältnis der gespeicherten Ladung  $Q$  zur zugehörigen Spannung  $U$ , d.h.  $C = Q/U$



**Abbildung** Kapazität (Link)

Die Kapazität hängt von der Bauform ab: bei einem Plattenkondensator beispielsweise von der Grösse der Platten, dem Abstand zwischen ihnen und dem Material zwischen den Platten.

## Definition des elektrischen Widerstandes ( $R$ )

### Makroskopische Betrachtung (URI)

Der elektrische Widerstand bestimmt die Stärke des Stroms, der bei einer bestimmten Spannung durch den Stromkreis fliesst. Unter dem **Widerstand  $R$**  versteht man das Verhältnis der Spannungsdifferenz zwischen zwei Punkten und der Stärke des Stroms zwischen diesen Punkten, d.h.

$$R = \frac{U}{I} \quad [R] = \frac{V}{A} = \Omega \text{ (Ohm)} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3 \text{ A}^2}$$

Die Einheit des elektrischen Widerstands ist das **Ohm**.

Den Kehrwert des elektrischen Widerstands nennt man **elektrischen Leitwert  $G$** .

$$G = \frac{1}{R} \quad [G] = \frac{1}{\Omega} = S \text{ (Siemens)}$$

Bei einem Leiter (Kabel) ist der elektrische Widerstand  $R$  gegeben durch die Länge  $L$ , die Querschnittsfläche  $A$  sowie den materialabhängigen **spezifischen elektrischen Widerstand  $\rho$** .

$$R = \frac{\rho L}{A} \quad [\rho] = \Omega \text{ m}$$

#### Bemerkungen

- Werte von  $\rho$  können in Tabellen gefunden werden.
- $\rho$  ist temperaturabhängig.
- Der Kehrwert von  $\rho$  ist die **elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$** : das heisst  $\sigma = 1/\rho$ .
- Vielfach wird für die elektrische Leitfähigkeit auch das Formelzeichen  $\kappa$  (Kappa) verwendet.
- Achtung: Dieses  $\rho$  darf man nicht mit der Massendichte  $\rho = \frac{m}{V}$  verwechseln.

### Mikroskopische Betrachtung ( $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ )

In einer lokalen Betrachtung und bei isotropen Materialien wird das ohmsche Gesetz bzw. der lineare Zusammenhang zwischen dem Stromdichte-Vektorfeld  $\vec{j}$  und dem elektrischen Feldstärke-Vektorfeld  $\vec{E}$  durch die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  beschrieben (Link) ...

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad [\sigma] = \frac{\text{Siemens (S)}}{\text{Meter (m)}} = \frac{1}{\Omega \text{ m}}$$

### Supraleitung

Es gibt Materialien, deren elektrischer Widerstand beim Unterschreiten der sogenannten Sprungtemperatur praktisch null wird. Diese Materialien nennt man **Supraleiter**.

Die Supraleitung wurde 1911 von Heike Kamerlingh Onnes (1853 - 1926, Link), einem Pionier der Tieftemperaturphysik, entdeckt. Sie ist ein makroskopischer Quantenzustand.

Wir werden im Skript "Festkörperphysik" näher auf die Supraleitung eingehen.

## Kraft, Arbeit, Energie und Leistung im elektrischen Feld (URI, PUI)

### Kraft, Arbeit und Energie

Wir haben schon vorne die folgenden Gleichungen kennengelernt ...

$$\vec{F} = q \vec{E} \quad \text{siehe Lorentzkraft}$$

$$W = q E s \quad \text{Arbeit} = \text{Kraft mal Weg}$$

$$U = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{W}{q} \quad \text{Spannung} = \text{Arbeit pro Ladung}$$

## Leistung (PUI)

Unter der Kraftwirkung eines elektrischen Feldes bewegen sich die Ladungsträger durch den Leiter. Die elektrische Arbeit wird dabei in Wärme, die **Stromwärme**, umgewandelt. Wir können die auftretende Leistung mit folgender Überlegung herleiten ...

$$(1) \quad U = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Ladung}} = \frac{W}{Q}$$

Definition der elektrischen Spannung

Wir haben bei  $W$  das positive Vorzeichen, da es sich hier um vom System geleistete Arbeit handelt.

$$(2) \quad P = \frac{W}{t}$$

Definition der Leistung

$$(3) \quad I = \frac{Q}{t}$$

Definition des Stroms

Durch Kombinieren erhalten wir das wichtige **PUI-Gesetz** ...

$$P \stackrel{(2)}{=} \frac{W}{t} \stackrel{(1)}{=} \frac{UQ}{t} \stackrel{(3)}{=} UI \quad \text{d.h.} \quad \mathbf{P = UI}$$

Die entsprechende Arbeit ergibt sich dann (bei konstanter Leistung) zu ...

$$W = Pt = UIt$$

Die folgende Tabelle listet einige typische elektrische Leistungen auf.

Taschenlampe	0.5-3	Mikrowellenherd	600-1000
LED-Lampe	2-10	Elektrogrill	2000
Halogenlampe 12 V	20-50	Waschmaschine	2200-3200
Fernsehgerät	bis 200	Elektroherd	bis 9000
Tauchsieder	bis 1000	Strassenbahnmotor	150000
Bügeleisen	600-1200	E-Lok-Motor	5000000

**Abbildung** Leistungen einiger Geräte in Watt.

# Magnetostatik

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

## Einleitung

In der **Magnetostatik** (Link) sind nur die Gleichungen (2) und (4) der Maxwell-Gleichungen relevant. Sie lauten (da  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$ ) ...

$$(2) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$(2)' \quad \oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$(4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$(4)' \quad \oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{L} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_S$$

Die Gleichung  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  haben wir schon vorne diskutiert. Sie bedeutet, dass es keine magnetischen Monopole gibt und dass die Feldlinien geschlossene Kurven sind.

Wenn wir die Elektrostatisitk mit der Magnetostatik vergleichen ...

Elektrostatisitk	Magnetostatik
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

sehen wir, dass beim elektrischen Feld die Rotation gleich 0 ist, während beim Magnetfeld die Divergenz gleich 0 ist.

## Vektorpotential

Analog zur Elektrostatisitk, wo wir das skalare Potential  $\varphi$  eingeführt haben, können wir hier das **Vektorpotential  $\vec{A}$**  definieren ...

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \partial_y(A_z) - \partial_z(A_y) \\ \partial_z(A_x) - \partial_x(A_z) \\ \partial_x(A_y) - \partial_y(A_x) \end{pmatrix}$$

Es erfüllt die Gleichung  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , da das mathematische Theorem ...

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0 \quad \text{div-rot} = 0$$

für alle Felder  $\vec{F}$  gilt.

Da das (gemäß Lorentz-Kraft) physikalisch wirksame Feld  $\vec{B}$  aus  $\vec{A}$  mittels Ableitungen berechnet wird, hat man gewisse Freiheiten, das Potential  $\vec{A}$  abzuändern und trotzdem das gleiche  $\vec{B}$ -Feld zu bekommen. Es gibt mehrere gängige Varianten (Coulomb-Eichung, Lorenz-Eichung), dies zu tun.

Wie lautet dann die Gleichung  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  mit dem Vektorpotential  $\vec{A}$ ?

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

Dabei haben wir ein weiteres mathematisches Theorem gebraucht ...

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad \text{d.h. rot[rot] = grad[div] - Laplace}$$

Mit der Coulomb-Eichung (d.h. wir wählen  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ ) ergibt sich dann die folgende Gleichung für das Potenzial  $\vec{A}$  ...

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

oder ausführlicher 
$$\begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix} = -\mu_0 \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$$

Wiederum haben wir Poisson-Gleichungen zu lösen. Hier insgesamt 3 Gleichungen.

### Bemerkung

- Das gleiche Verhalten von  $\varphi$  und  $\vec{A}$  ist nicht zufällig.
- Es wird sich herausstellen, dass  $\begin{pmatrix} \varphi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$  ein 4-er Vektor ist, wie er auch in der Speziellen Relativitätstheorie vorkommt.
- Die Maxwell-Gleichungen werden (im Gegensatz zu den Gleichungen der klassischen Mechanik) gemäss den Lorentztransformationen der Speziellen Relativitätstheorie transformiert.

## Magnetisches Feld um einen geraden Leiter

Für einfache symmetrische Situationen liefert uns die Maxwell-Gleichung (4)' ...

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{L} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_S$$

schon sehr interessante Ergebnisse.

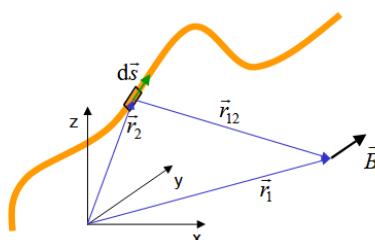
Wenn wir beispielsweise das Magnetfeld im Abstand  $r$  eines unendlich langen geraden Leiters, in dem der Strom  $I$  fließt, bestimmen wollen, können wir direkt die obige Gleichung anwenden. Wir legen einen Kreis symmetrisch um den Leiter und erhalten (da aus Symmetriegründen  $B$  entlang des Kreises überall gleich gross ist) ...

$$B * \text{Kreisumfang} = B * 2\pi r \stackrel{(4)'}{=} \mu_0 I \quad \rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Das Magnetfeld, das in Richtung des Kreisumfangs zeigt, nimmt umgekehrt proportional zum Abstand vom Leiter ab. Für die Richtung gilt die Rechte-Hand-Regel: Daumen in Stromrichtung, die Finger der geschlossenen Faust zeigt die Drehrichtung an.

## Biot-Savart Gesetz

Für kompliziertere (nicht symmetrische) Situationen gestaltet sich die Berechnung des Magnetfeldes um einen stationären stromführenden Leiter komplizierter ...



**Abbildung** Jedes Drahtstück trägt zum Magnetfeld bei.

Zur Bestimmung des Magnetfeldes in diesen Situationen dient das Gesetz von Biot-Savart. Es ist ein fundamentales Gesetz in der Magnetostatik und ist analog zum Coulombschen Gesetz in der Elektrostatik, das die Beziehung zwischen elektrischen Ladungen und elektrischen Feldern beschreibt.

Das **Biot-Savart-Gesetz** (Link) berechnet das magnetische Feld  $\vec{B}$  an einem Punkt im Raum, das durch ein infinitesimales Element  $d\vec{s}$  eines Stromleiters mit Stromstärke  $I$  erzeugt wird. Das Gesetz ist gegeben durch (siehe obige Abbildung) ...

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{s} \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{r}_{12} = \vec{r} - \vec{r}'$$

$\vec{r}$  ist der Beobachtungspunkt

$\vec{r}'$  ist die Stelle des Stromelements

## Bemerkungen

- Das Magnetfeld  $d\vec{B}$  ist proportional zum Strom und zur Länge des Stromelements.
- Das Magnetfeld nimmt mit dem Quadrat der Entfernung  $r_{12}$  ab. Das Feld wird somit schwächer, je weiter man sich vom Stromelement entfernt.
- Das Kreuzprodukt  $\vec{r}_{12} \times \vec{ds}$  zeigt an, dass das Magnetfeld  $d\vec{B}$  senkrecht zu Ebene steht, die durch die Richtung des Stromelements  $\vec{ds}$  und den Verbindungsvektor  $\vec{r}_{12}$  aufgespannt wird.
- Das Biot-Savart Gesetz gilt nur für stationäre Ströme und ist nicht auf zeitabhängige elektromagnetische Felder anwendbar.

Um das ganze Magnetfeld zu berechnen, muss über den stromführenden Draht  $\vec{r}'$  integriert werden.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\text{Draht}} \frac{\vec{ds} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|r - r'|^3}$$

Mit Hilfe der Beziehung ...

$$I \vec{ds} = \vec{v} dq = \vec{v} \rho dV = \vec{j} dV$$

kann das Linienintegral auch in ein Volumenintegral umgewandelt werden ...

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|r - r'|^3} dV$$

Diese Beziehung (bzw. das Biot-Savart Gesetz) kann mit Hilfe der Lösung der Poisson-Gleichung für das Vektorpotenzial und mit Hilfe von Vektoridentitäten hergeleitet werden (siehe Link).

## Nord- und Südpol

Die Enden eines Stabmagneten werden Nord- und Südpol genannt. Genauer ...

- Ein Stabmagnet an der Erdoberfläche richtet sich bei Fehlen anderer Kräfte so aus, dass eines seiner Enden in Richtung Norden, zum arktischen Magnetpol, und das andere in Richtung des antarktischen Magnetpols zeigt.
- **Das nach Norden zeigende Ende wird Nordpol des Magneten genannt.**
- Durch Definition wurde festgelegt, dass **am Nordpol eines Magneten die Feldlinien senkrecht aus dem Magneten aus- und an seinem Südpol senkrecht in ihn eintreten**.
- Deshalb bezeichnet man allgemein bei Elektromagneten oder Permanentmagneten Gebiete, aus denen die Feldlinien austreten, als Nordpol und Gebiete, in die sie eintreten, als Südpol.
- Da der Nordpol eines Magneten vom arktischen Erd-Magnetpol angezogen wird, ist der arktische Erd-Magnetpol ein magnetischer Südpol. Entsprechend wird der Südpol eines Magneten vom antarktischen Erd-Magnetpol angezogen, der ein magnetischer Nordpol ist.

## Permanentmagnet

### Definition

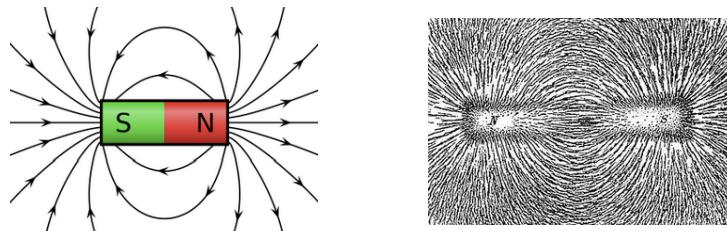
**Permanentmagnete** (Link) - auch Dauermagnete genannt - behalten nach einer Magnetisierung diese über lange Zeit bei. Sie basieren auf ferromagnetischen Elementen (Eisen, Kobalt, Nickel), die durch Beimischung von Elementen wie Neodym oder Bor ihre magnetische Stabilität und Kraft erhalten.

Verwendung finden Dauermagneten beispielsweise in Kompassen als Magnetnadel, in Elektromotoren, in elektrischen Messinstrumenten, in Lautsprechern, Kopfhörern, Mikrofonen, Sensoren, Festplattenlaufwerken, Magnettafeln und Magnethalterungen.

Mit Hilfe eines von einem anderen magnetischen Körper oder durch elektrischen Strom erzeugten Magnetfeldes können ferromagnetische Stoffe vorübergehend (sogenannter induzierter Magnetismus) oder dauerhaft durch Ausrichtung der Weiss-Bezirke selbst zu Magneten werden.

## Stabmagnet

Als Stabmagnet (Link) bezeichnet man im Allgemeinen Magnete mit zylindrischer oder quaderförmiger Form, die genau einen magnetischen Nord- und Südpol besitzen. Die magnetischen Pole liegen typischerweise entlang der längsten Symmetriechse. Der Stabmagnet hat ausserhalb die stärkste Anziehungs- kraft an den Polen und nur geringe Feldstärken an der Stabmitte.



**Abbildung** a) Magnetfeldlinien beim Stabmagnet  
b) Mit Hilfe von Eisenspänen kann das Magnetfeld sichtbar gemacht werden.

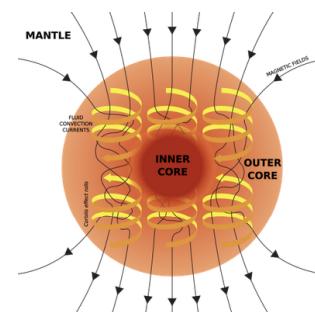
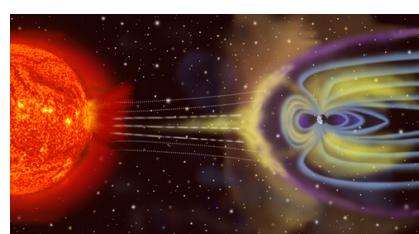
### Bemerkungen

- Nach gängiger Konvention treten die Feldlinien am „Nordpol“ (meist rot dargestellt) aus und am „Südpol“ (meist grün dargestellt) in den Magneten ein.
- Die Magnetfeldrichtung ist durch die Kraftwirkung auf einen Probemagneten definiert.
- Die Feldlinien sind geschlossen (es gibt keine magnetischen Monopole). Sie verlaufen auch im Inneren des Magneten.
- Neben den quaderförmigen Stabmagneten gibt es auch U-förmige oder anders geformte Magnete.
- **Gleichartige Pole stoßen sich ab, ungleichartige Pole ziehen sich an.**
- Ein kleiner Probemagnet dreht sich in die Richtung der Feldlinien.

## Magnetfeld der Erde

Das Erdmagnetfeld (Link) durchdringt und umgibt die Erde. Dieses Magnetfeld beruht auf drei Ursachen  
...

- Der Hauptanteil des Magnetfelds (etwa 95 Prozent) wird vom **Geodynamo** im flüssigen äusseren Erdkern hervorgerufen.
- Ein zweiter Anteil (1 bis 3 Prozent an der Erdoberfläche) entsteht durch elektrische Ströme in der **Ionosphäre** und der **Magnetosphäre**.
- Der dritte Anteil (einige Prozent) variiert räumlich stark. Zeitlich verändert er sich nur in geologischen Zeiträumen und beruht auf lokalen remanenten Magnetisierungen in Teilen der **oberen Erdkruste**.



**Abbildung** a) Das Erdmagnetfeld schirmt die Erdoberfläche von geladenen Teilchen des Sonnenwinds ab.  
b) Modell des Geodynamo-Mechanismus.

Der **magnetische Südpol** der Erde liegt in der Nähe des geographischen Nordpols. Der **magnetische Nordpol** liegt in der Nähe des geographischen Südpols. Diese Pole sind jedoch nicht ortsfest. (Video)

Aktuelle Standorte der magnetischen (dip) Pole der Erde, IGRF -13 Schätzung [11]				
Jahr	1990 (endgültige Fassung)	2000 (endgültig)	2010 (endgültig)	2020
<b>Nordmagnetischer Pol</b>	78,095°N 103,689°W	80,972°N 109,640°W	85,020°N 132,834°W	86,494°N 162,867°E
<b>Südmagnetischer Pol</b>	64,910°S 138,902°E	64,661°S 138,303°E	64,432°S 137,325°E	64,081°S 135,866°E

**Tabelle** Die magnetischen Pole (wo die Magnetfeldlinien senkrecht zur Erdoberfläche stehen) wandern (Link).

- Über kurze Zeitperioden wandern die magnetischen Pole der Erde. Der arktische Magnetpol wandert derzeit mit etwa 55 bis 60 km/Jahr in Richtung Russland.
- Im Durchschnitt alle 250'000 - 500'000 Jahre gibt es jedoch eine **Polumkehr** (letztmals vor 780'000 Jahren).
- In ferner Zukunft, frühestens in 500 Millionen Jahren, könnte eine Abkühlung des Erdinneren dazu führen, dass das Erdmagnetfeld **weitgehend reduziert** ist und seine Funktionen nicht weiter erfüllt, wie den Schutz der Atmosphäre vor Solarwinden.

Eine frei bewegliche Magnettadel stellt sich unter der Wirkung des magnetischen Erdfeldes in Richtung der Feldlinien ein. Diese Richtung weicht sowohl von der Horizontalen als auch von der Nord-Süd-Richtung ab.

- Unter **Deklination** versteht man die Abweichung einer Magnettadel von der geographischen Nord-Süd-Richtung.
- Unter **Inklination** versteht man die Abweichung einer Magnettadel von der Horizontalen.

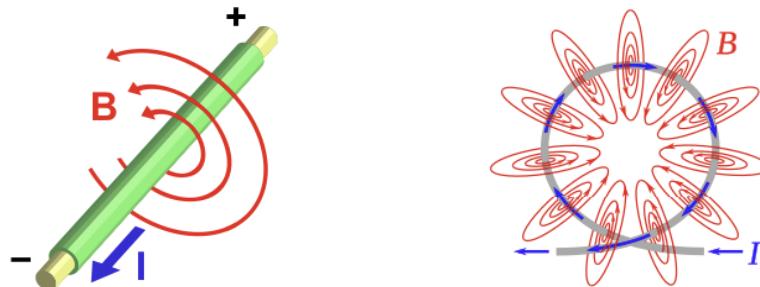
## Elektromagnet

Um einen stromführenden Leiter mit der Stromstärke / bildet sich (wie wir gesehen haben) ein kreisförmiges Magnetfeld der Stärke ...

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

Wenn nun der Leiterdraht zylinderförmig aufgewickelt wird ( $N$  Windungen, Zylinderlänge  $L$ ), verstärkt sich das Magnetfeld im Inneren der Spule zu ...

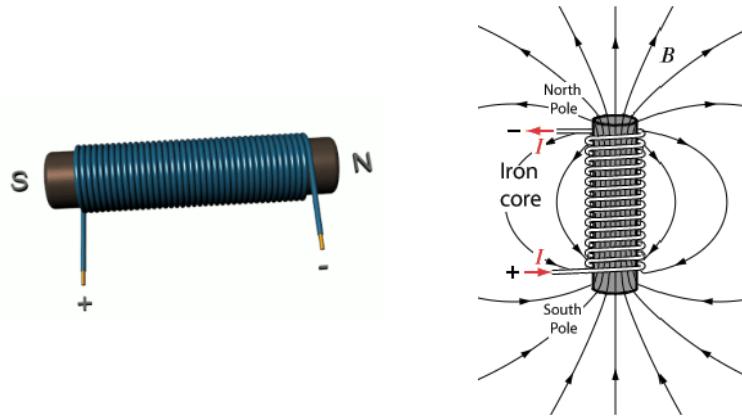
$$H = \frac{IN}{L}$$



- Abbildung**
- Magnetfeld um einen stromführenden Leiter ( $B = \mu H$ )
  - Magnetfeldverstärkung im Inneren einer Schleife

Die Richtung des Magnetfeldes ist jeweils durch die Rechte-Hand-Regel gegeben.

Diese Bauart wird als **Elektromagnet** (Link, Link) bezeichnet. Das Magnetfeld verschwindet wieder, sobald der Strom abgeschaltet wird. Das Magnetfeld ist somit nicht permanent.



**Abbildung** a) Elektromagnet: Drahtspule um einen Eisenkern gewickelt.  
b) Magnetfeld bei einer Spule

In der Spule befindet sich meist ein offener Eisenkern, der das Magnetfeld führt und verstärkt. Die Erfindung des Elektromagneten gelang dem Engländer William Sturgeon im Jahre 1826. Erstmals nachgewiesen wurde die elektromagnetische Wirkung 1820 von dem dänischen Physiker Hans Christian Ørsted.

Der Hauptvorteil eines Elektromagneten gegenüber einem Permanentmagneten ist, dass die Stärke des Magnetfelds schnell verändert werden kann, indem der Strom durch die Spule verändert wird. Der Nachteil gegenüber einem Permanentmagneten ist die Tatsache, dass der Elektromagnet (im Gegensatz zum Permanentmagneten) einen kontinuierlichen Stromfluss braucht, um das Magnetfeld aufrecht zu halten.

## Definition der magnetischen Spannung ( $U_m$ )

Analog zur elektrischen Spannung kann eine **magnetische Spannung**  $U_m$  definiert werden ...

$$U_m = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{s} \quad [U_m] = A$$

Die gesamte magnetische Spannung über einer geschlossenen Feldlinie ...

$$\oint_{\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{s}$$

heisst **magnetische Umlauf- oder Randspannung**.

## Definition des magnetischen Flusses ( $\phi$ )

Der magnetische Fluss ist das Produkt aus der magnetischen Flussdichte  $\vec{B}$  und dem Flächeninhalt  $A$  der Querschnittsfläche  $S$ . Für ein homogenes Feld gilt ...

$$\phi = B_{\text{senkrecht}} A \quad [\phi] = \text{Weber (Wb)} = \text{Vs}$$

wobei  $B_{\text{senkrecht}}$  die Komponente von  $\vec{B}$  senkrecht zur Querschnittsfläche  $S$  ist.

Für ein inhomogenes Feld muss das Skalarprodukt verwendet und über die Querschnittsfläche integriert werden ...

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

## Kraft, Arbeit, Energie und Leistung im Magnetfeld

### Lorentz-Kraft

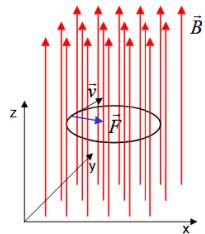
$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{siehe Kapitel "Lorentzkraft"}$$

### Energiedichte des Magnetfeldes

Die Energiedichte des Magnetfelds beträgt ...

$$w = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2$$

### Kreisbewegung einer Ladung im homogenen Magnetfeld



**Abbildung** Kreisbewegung einer Ladung im homogenen Magnetfeld.

Wir können die beiden Kräfte ...

$$F_L = q v B \quad \text{Lorentzkraft}$$

$$F = m \frac{v^2}{r} \quad \text{Zentripetalkraft bei einer Kreisbewegung}$$

gleichsetzen und erhalten ...

$$r = \frac{mv}{qB}$$

Die Kraft  $q(\vec{v} \times \vec{B})$  kann ein Teilchen nicht beschleunigen, sie kann nur seine Richtung verändern.

Wenn gleichzeitig noch ein elektrisches Feld in Richtung des Magnetfelds wirkt, resultiert eine Spiralbewegung.

# Elektrodynamik

## Einleitung

Wir kommen in der Elektrodynamik nun zu zeitabhängigen Phänomenen, d.h. insbesondere zu den Maxwell-Gleichungen (3)' und (4)'.

$$(1)' \quad \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{inside}}$$

$$(2)' \quad \oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$(3)' \quad \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{L} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \phi_{B,S}$$

$$(4)' \quad \oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{L} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_S + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \phi_{E,S}$$

Es ist klar, dass diese zeitabhängigen Gleichungen noch schwieriger als diejenigen der Elektrostatik und Magnetostatik zu lösen sind. Wir werden dies nicht vertiefen und nur noch einige Ausführungen zu den Maxwell-Gleichungen (3)' und (4)' machen.

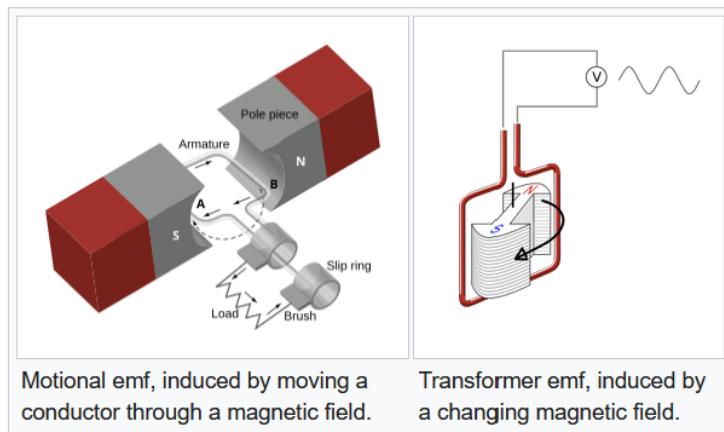
## Induktionsgesetz

## Gleichung (3)'

Gleichung (3)' bedeutet: ein veränderlicher magnetischer Fluss durch eine Fläche geht einher mit einer Spannung (EMF: electromotive force) entlang des Rands dieses Kreises. Man spricht von einer Induktionsspannung.

Die Änderung des magnetischen Flusses kann auf mehrere Arten bewerkstelligt werden ...

- durch Änderung der Grösse oder der Ausrichtung der Fläche (Bewegungsinduktion)
- durch Änderung der magnetischen Flussdichte  $\vec{B}$



**Abbildung** Bewegungsinduktion und Induktion durch Änderung des magnetischen Flusses (Link)

Aus der Gleichung (3)' können wir das Gesetz von Faraday herleiten, denn aus ...

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{L} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

und den Definitionen / Beziehungen ...

$$\Phi_{B,S} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \text{magnetischer Fluss}$$

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{L} = U_{\text{induziert}} \quad \text{induzierte Spannung}$$

folgt unmittelbar das **Gesetz von Faraday** ...

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt} \Phi_{B,S}$$

## Maxwell-Ampere Gesetz

## Gleichung (4)'

Gleichung (4)' bedeutet: ein veränderlicher elektrischer Fluss und ein Strom durch eine Fläche gehen einher mit einer magnetischen Spannung entlang des Rands dieses Kreises.

Dieses Gesetz findet Anwendung u.a. bei ...

- der Berechnung des Magnefelds
  - um einen langen geraden stromdurchflossenen Draht,
  - im Inneren einer geraden Spule (Elektromagnet),
  - im Inneren einer ringförmigen Spule,
- der Erzeugung von elektromagnetischen Wellen,
- der drahtlosen Energieübertragung (kabelloses Laden bei Smartphones). Eine Spule erzeugt ein Magnetfeld, das in einer zweiten Spule im zu ladenden Gerät einen Strom induziert.

## Bemerkung zur vierten Maxwell-Gleichung

Noch eine Bemerkung zur vierten Maxwell Gleichung:

- Als Maxwell seine Gleichungen zusammenstellte, konnte er auf Experimente zurückgreifen und die entsprechenden Differentialgleichungen formulieren.
  - Coulomb Kraft  $\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$
  - Keine magnetischen Monopole  $\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
  - Induktionsgesetz  $\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
  - Magnetfeld um einen stromführenden Leiter  $\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$
- Diese Gleichungen stimmten mit den damaligen Beobachtungen und Experimenten überein.
- Sie erfüllten jedoch nicht die Ladungserhaltung.
- Die grosse Leistung von Maxwell war, einen zusätzlichen Term, den **Verschiebungsstrom**  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , in der vierten Maxwellgleichung zu integrieren.
- Dieser Term ist sehr klein und war zur damaligen Zeit nicht beobachtbar.
- Mit diesem Term wurde die Ladungserhaltung erfüllt und
- es liessen sich nun auch die elektromagnetischen Wellen aus den Maxwell-Gleichungen ableiten.

## Physikalische Grösse und deren Einheiten beim Elektromagnetismus

Eine ähnliche Zusammenstellung kann auch in der Merkhilfe Physik gefunden werden.

Elektrisches Feld			Magnetisches Feld		
Grösse	Gleichung	Einheit	Grösse	Gleichung	Einheit
Lorentzkraft	$\vec{F} = Q \vec{E}$	N	Lorentzkraft	$\vec{F} = Q (\vec{v} \times \vec{B})$	N
elektr. Feldstärke	$\vec{E}$	V / m	magn. Feldstärke	$\vec{H}$	A / m
elektr. Flussdichte	$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$	C / m <sup>2</sup>	magn. Flussdichte	$\vec{B} = \mu \vec{H}$	T = Wb / m <sup>2</sup>
	$D = \frac{Q}{A}$	C / m <sup>2</sup>		$B = \frac{\Phi}{A}$	T
Permittivität	$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$	F / m	Permeabilität	$\mu = \mu_r \mu_0$	H / m
Permittivitätszahl	$\epsilon_r$	1	Permeabilitätszahl	$\mu_r$	1
elektr. Feldkonstante	$\epsilon_0$	F / m	magn. Feldkonstante	$\mu_0$	H / m
elektr. Spannung	$U = E s$	V	magn. Spannung	$V = H s$	A
Stromstärke	$I = \frac{dQ}{dt}$	A	Induz. Spannung	$U = -\frac{d\Phi}{dt}$	V
Ladung	$Q = I t$	C	magnetischer Fluss	$\Phi = B A$	Wb = V s
Kapazität	$C = \frac{Q}{U}$	F = C / V	Induktivität	$L = -\frac{U_{ind}}{\partial I / \partial t}$	H
Energiedichte	$w = \frac{1}{2} E D$	J / m <sup>3</sup>	Energiedichte	$w = \frac{1}{2} B H$	J / m <sup>3</sup>
Kondensatorenergie	$E_F = \frac{1}{2} C U^2$	J	Spulenenergie	$E_F = \frac{1}{2} L I^2$	J

**Abbildung** Zusammenstellung der wichtigsten physikalischen Größen der Elektrodynamik

# Elektrische Bauteile

## Einleitung

Ein Stromkreis enthält verschiedene elektrische oder elektronische Bauteile. Die klassischen elementaren Bauteile sind ...

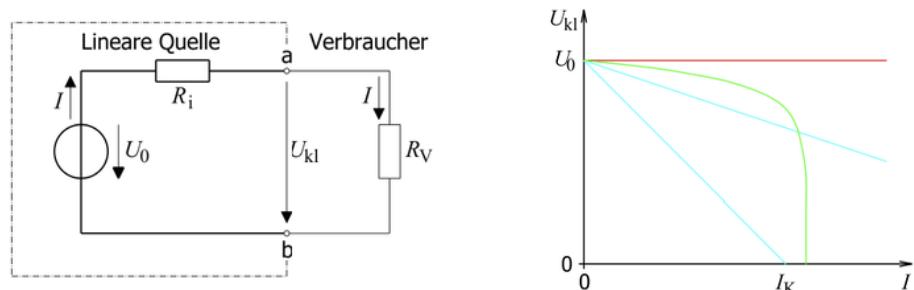
- Spannungsquellen
- Stromquellen
- Leiter (Verbindungen zwischen Bauteilen)
- Verzweigungen
- Schalter
- Widerstände
- Kondensatoren
- Spulen

Wir werden im Folgenden einige Ausführungen zu diesen Bauteilen machen.

## Spannungs- und Stromquelle

### Spannungsquelle

Die **Spannungsquelle** (Link, Link) ist ein elektrisches Bauteil (oder eine elektrische Schaltung) mit zwei Anschlüssen, die eine bestimmte elektrische Spannung zur Verfügung stellen. Eine ideale Spannungsquelle bietet diese Spannung unabhängig vom fliessenden Strom an. Die Spannung einer realen Spannungsquelle hängt hingegen leicht von der elektrischen Stromstärke ab.



**Abbildung** a) Ersatzschaltbild einer realen Spannungsquelle mit Verbraucher  
b) Kennlinien idealer (rot), linearer (türkis), nichtlinearer (grün) Spannungsquellen  
 $I_K$  ist die Kurzschlussstromstärke.

In obiger Abbildung sind die wesentlichen Bauteile eines Stromkreises mit Spannungsquelle eingezeichnet.

- $U_0$  ist die sogenannte **Quellenspannung** der idealen Spannungsquelle.
- Als **ideale Spannungsquelle** wird eine Quelle bezeichnet, die unabhängig von der in ihr herrschenden Stromstärke stets dieselbe Spannung abgibt.
- $R_i$  ist der Innenwiderstand der realen Spannungsquelle.
  - Bei **realen Spannungsquellen** nimmt vielfach die Spannung zwischen den Klemmen in einem nahezu linearen Zusammenhang mit der Stromstärke ab – solche linearen Spannungsquellen lassen sich ersetzt durch eine Reihenschaltung aus einer idealen Spannungsquelle und einem ohmschen Widerstand  $R_i$  beschreiben.
- $I$  ist der Strom, der durch die Spannungsquelle und den Verbraucherwiderstand fliessst.

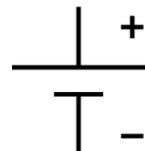
- $U_{kl}$  ist die **Klemmenspannung**, die dem Verbraucher (bei der Stromstärke  $I$ ) zur Verfügung steht.
  - Je stärker die Quelle vom Verbraucher belastet wird, desto tiefer sinkt die an den Klemmen anliegende Spannung.
- $R_V$  ist der **Verbraucherwiderstand**.
  - Der Innenwiderstand begrenzt die maximale Stromstärke, die im Kurzschlussfall (d.h.  $R_V = 0$ ) möglich ist.
  - Die **Kurzschlussstromstärke**  $I_K$  berechnet sich dann zu  $I_K = U_0 / R_i$ .

Bemerkung

- **Batterie** (Link, Link) im engeren Sinne ist die Bezeichnung für eine **Primärbatterie** (auch Primärelement genannt), die nicht wiederaufladbar ist.
- Aufladbare Batterien werden **Sekundärbatterie** oder landläufig **Akkumulator** (kurz Akku) genannt.



**Abbildung** Beispiele von Batterien

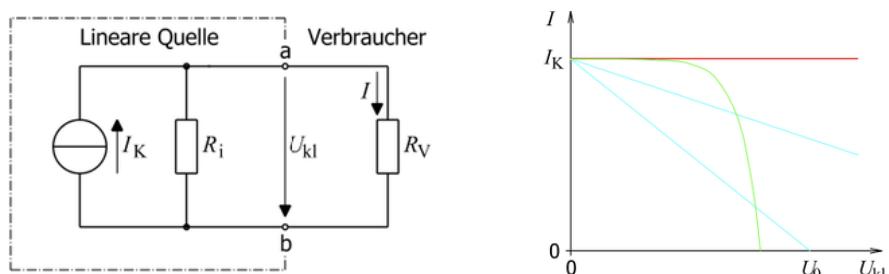


- Primär- und Sekundärbatterien haben das folgende Schaltzeichen:

- Die jeweilige Spannung resultiert aus der Differenz zwischen den beiden unterschiedlichen Redoxpotenzialen der Elektroden.
- Im Gegensatz zur Batterie speichert ein **Kondensator** elektrische Energie in einem elektrischen Feld, wodurch er wesentlich schneller aufgeladen und entladen werden kann, aber nicht in der Lage ist, die Spannung während der Entladung konstant zu halten.

## Stromquelle

Die **Stromquelle** (Link) ist ein elektrisches Bauteil (oder eine elektrische Schaltung) mit zwei Anschlüssen, das einen bestimmten elektrischen Strom zur Verfügung stellt. Die ideale Stromquelle liefert diesen Strom unabhängig von der aufgebauten elektrischen Spannung. Sie dient als mathematisches Modell, um komplizierte Schaltungen einfacher darstellen zu können.



- Abbildung**
- Ersatzschaltbild einer realen Stromquelle mit Verbraucher
  - Kennlinien idealer (rot), linearer (türkis) Stromquellen und zum Vergleich einer realen Solarzelle (grün).

Auf Stromquellen wird hier nicht weiter eingegangen.

## Verbindung, Verzweigung und Schalter im Stromkreis

### Verbindung



**Abbildung** Ein Leiter verbindet zwei Bauteile im Stromkreis.

Um die Verbindung zwischen den verschiedenen elektrischen Bauteilen herzustellen, werden elektrische Kabel eingesetzt.

Die Kabel sollten einen geringen elektrischen Widerstand  $R$  haben, ...

- damit kein zusätzlicher Spannungsabfall stattfindet und die Spannungen des Stromkreises verändert werden und
- damit nicht zuviel Wärme produziert wird und der Draht schmilzt.

Der Widerstand eines Kabels hängt gemäss ...

$$R = \frac{\rho L}{A}$$

$$[R] = \Omega$$

$$[\rho] = \Omega \text{ m}$$

von der Länge  $L$ , der Querschnittsfläche  $A$  und dem **spezifischen elektrischen Widerstand  $\rho$**  des Materials ab. Der Kehrwert des spezifischen elektrischen Widerstands ist die **elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$**  ...

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

$$[\sigma] = \frac{1}{\Omega \text{ m}}$$

statt  $\sigma$  wird auch  $\kappa$  verwendet

Typische Werte spezifischer elektrischer Widerstände für Leiter und Isolierstoffe sind in der folgenden Tabelle aufgeführt ...

Leiter	$\rho / \frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}}$	Isolierstoffe	$\rho / (\Omega \text{ m})$
Silber	0.016	Seewasser	0.3
Kupfer	0.017	Wasser, destill.	$1 \dots 4 \cdot 10^4$
Gold	0.022	Holz, trocken	$10^9 \dots 10^{13}$
Aluminium	0.027	Transformator- enöl	$10^{10} \dots 10^{13}$
Eisen	0.10	Glas	$> 10^{11}$
Konstantan	0.5	Porzellan	$5 \cdot 10^{12}$
Quecksilber	0.96	Plexiglas	$10^{13}$
Graphit	8.00	Papier	$10^{15} \dots 10^{16}$
Kohle, Bürste	40	Quarzglas	$5 \cdot 10^{13}$

**Tabelle** Spezifischer elektrischer Widerstand (20 °C)

#### Bemerkungen

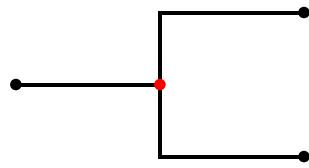
- Der spezifische elektrische Widerstand  $\rho$  ist in der obigen Tabelle für Leiter und Isolierstoffe in unterschiedlichen Einheiten angegeben. Die Umrechnung geht gemäss ...

$$\frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}} = \left( \frac{\Omega (10^{-3} \text{ m})^2}{\text{m}} \right) = \frac{\Omega \text{ m}^2}{\text{m}} 10^{-6} = 10^{-6} \Omega \text{ m}$$

- Die spezifischen elektrischen Widerstände sind temperaturabhängig.
- Für ein 50 cm langes Kupferkabel mit einem Durchmesser von 1 mm ergibt sich der elektrische Widerstand zu ...

$$R = \frac{(0.017 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ m}) 0.5 \text{ m}}{\pi (0.5 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} \approx 0.011 \Omega$$

## Verzweigung



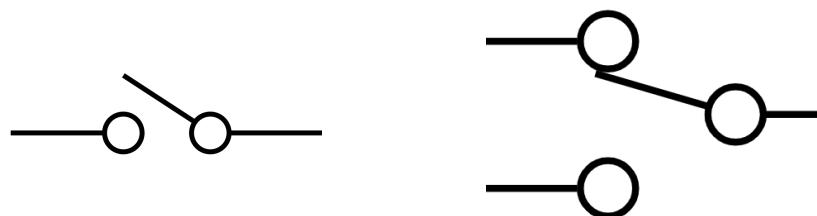
**Abbildung** Eine Verzweigung im Stromkreis

Bei einer Verzweigung gilt der Kirchhoff'sche Knotenpunktsatz.

## Schalter

Ein Schalter (Link) dient dazu, einen Stromfluss zu erlauben oder zu unterbinden, abhängig von der Schalterstellung ...

offen:	es fließt kein Strom	$R = \infty$
geschlossen:	es fließt Strom	$R = 0$



**Abbildung** a) Einpoliger Einschalter (Ein-Aus)  
b) Einpoliger Wechselschalter (Ein-Ein)

Bemerkungen

- Schalter können mechanisch oder auch mit Hilfe von Transistoren oder Dioden elektronisch betätigt werden.
- Es gibt sehr viele verschiedene Schalter: Kippschalter, Wippschalter, Druckschalter, Drehschalter, ...

## Ohm'scher Widerstand (URI und IGU)

### Einleitung

Ein **Widerstand** (engl. resistor) ist ein zweipoliges passives elektrisches Bauteil. Es wird verwendet (Link), um ...

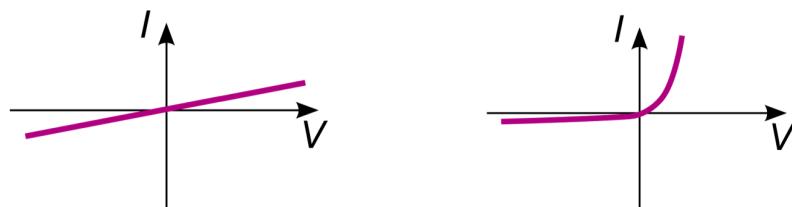
- den elektrischen Strom zu begrenzen,
- den elektrischen Strom in einer Schaltung aufzuteilen,
- den elektrischen Strom in eine Spannung umzuwandeln, um ihn (indirekt) zu messen,
- die elektrische Spannung in einer Schaltung aufzuteilen,
- elektrische Energie in Wärmeenergie umzuwandeln.

Wir unterscheiden zwischen linearen und nicht-linearen bzw. parameterabhängigen Widerständen.

Wir können folgende Unterteilung vornehmen ...

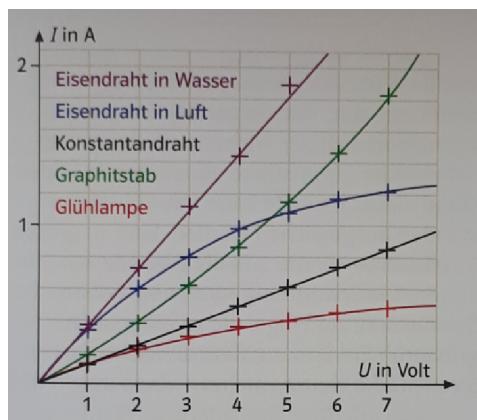
- Temperaturabhängige Widerstände ...
  - Kaltleiter: der Widerstand steigt mit steigender Temperatur.
  - Heissleiter: der Widerstand fällt mit steigender Temperatur.

- Fotowiderstände ändern ihren Widerstand unter Lichteinwirkung.
- Spannungsabhängige Widerstände.
- Druck- und dehnungsabhängige Widerstände.



**Abbildung** Lineare Kennlinie (Ohm'scher Widerstand) und nicht-lineare Kennlinie (Diode).

Wir behandeln im Folgenden nur die linearen Widerstände. Sie werden **ohm'sche Widerstände** genannt und haben eine lineare Strom-Spannung  $I[U]$  bzw. Spannung-Strom  $U[I]$  Kennlinie.



**Abbildung** Kennlinien verschiedener Materialien

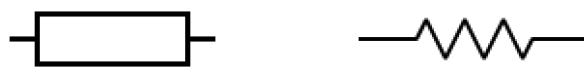
## Ohm'sche Widerstände

Die **Ohm'schen Widerstände** mit ihrer linearen Kennlinie lassen sich durch die folgende Gleichung beschreiben.

$$U = RI \quad \text{oder} \quad I = \frac{U}{R} \quad \text{oder} \quad R = \frac{U}{I}$$

Dies ist das bekannte und sehr wichtige **URI-Gesetz**.

Für Ohm'sche Widerstände wird das folgende Schaltschema benutzt.



EN 60617

ANSI

**Abbildung** Schaltzeichen für den elektrischen Widerstand

An Stelle des Widerstands  $R$  kann auch der Kehrwert  $\frac{1}{R}$  verwendet werden. Er heißt **elektrischer Leitwert** und wird mit  $G$  bezeichnet ...

$$G = \frac{1}{R} \quad [G] = \text{Siemens (S)} = \frac{1}{\Omega}$$

Für ihn gilt das ohm'sche Gesetz in der folgenden Form ...

$$I = GU \quad \text{IGU}$$

## Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstands

Der spezifische elektrische Widerstand von Leitern und Nichtleitern ist temperaturabhängig ...

- Der Widerstand eines metallischen Leiters wächst beim Erwärmen.
  - Bei einigen Metallen sinkt der Widerstand in der Nähe des absoluten Nullpunkts sprunghaft auf annähernd 0 (Supraleitung).
  - Es gibt Legierungen wie Konstantan (60% Cu, 40% Ni) oder Manganin (86% Cu, 2% Ni, 12% Mn), die sehr wenig temperaturabhängig sind.
- Der Widerstand eines Halbleiters sinkt beim Erwärmen.

Der **spezifische Widerstand**  $\rho$  wird in Tabellen meist auf 20°C bezogen und dessen Temperaturabhängigkeit kann durch die folgende Gleichung beschrieben werden ...

$$\rho[t] = \rho[20\text{ °C}] * (1 + \alpha(t - 20\text{ °C})) \quad t \text{ ist die Temperatur in Celsius}$$

Daraus kann man ableiten, dass der **Temperaturkoeffizient**  $\alpha$  ...

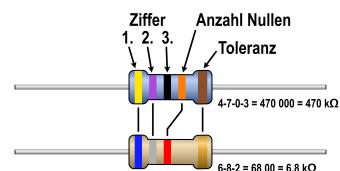
$$\alpha = \frac{\rho[t] - \rho[20\text{ °C}]}{\rho[20\text{ °C}] * (t - 20\text{ °C})} = \frac{\Delta \rho}{\rho[20\text{ °C}] * \Delta t} = \frac{\Delta \rho / \rho[20\text{ °C}]}{\Delta t}$$

das Verhältnis der relativen Änderung des elektrischen Widerstands zur Temperaturänderung ist.

## Farbkodierung bei Ohm'schen Widerständen

Die Farbkodierung für Widerstände ist eine Farbkennzeichnung für die elektrischen Werte von Widerständen. Als elektronische Bauteile sind diese oft sehr klein und darüber hinaus zylindrisch, so dass es schwierig ist, lesbare Zahlen aufzudrucken. Stattdessen geben umlaufende farbige Ringe den Widerstandswert und die Toleranzklasse an...

Farbe	Widerstandswert in $\Omega$				Toleranz	Temperaturkoeffizient
	1. Ring (Hunderter)	2. Ring (Zehner)	3. Ring (Einer)	4. Ring (Multiplikator)		
silber				$10^{-2} = 0.01$		
gold	2	0	0	$10^{-1} = 0.1$		
schwarz		0	0	$10^0 = 1$		$200 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
braun	1	1	1	$10^1 = 10$	$\pm 1\%$	$100 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
rot	2	2	2	$10^2 = 100$	$\pm 2\%$	$50 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
orange	3	3	3	$10^3 = 1000$		$15 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
gelb	4	4	4	$10^4 = 10.000$		$25 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
grün	5	5	5	$10^5 = 100.000$	$\pm 0,5\%$	
blau	6	6	6	$10^6 = 1.000.000$	$\pm 0,25\%$	$10 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
violett	7	7	7		$\pm 0,1\%$	$5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
grau	8	8	8		$\pm 0,05\%$	
weiß	9	9	9			



**Abbildung** Farbcodierung von Widerständen und zwei Beispiele.

Wenn nur 4 Farben vorhanden sind, gilt für die 4 Farben:

1. Zehner, 2. Einer, 3. Multiplikator, 4. Toleranz

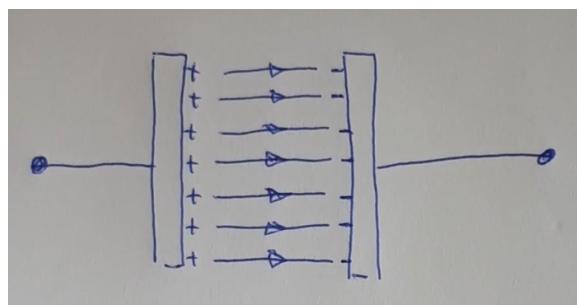
## Kondensator und Kondensatorgleichung ( $Q = C U$ )

Beim Aufladen eines Körpers ist die Spannung  $U$  (gegenüber einem Bezugspunkt) proportional zur zugeführten Ladung  $Q$  ...

$$Q = C U \quad [C] = F (\text{Farad}) = \frac{C}{V} = \frac{As}{V}$$

Die Proportionalitätskonstante ist die sogenannte **Kapazität  $C$**  des Körpers (Link). Sie ist ein Mass für die Fähigkeit, Ladungen zu speichern. Die Beziehung  $Q = C U$  heisst **Kondensatorformel**.

Ein Bauteil mit einer elektrischen Kapazität ist der Kondensator (Link). Darunter versteht man zwei ungleichartig geladene Körper, die einen bestimmten Abstand voneinander haben. Ein einfaches Beispiel sind zwei parallel zueinander stehende Platten.



**Abbildung** Zweiplattenkondensator

Die Kapazität  $C = \frac{Q}{U}$  eines **Zweiplattenkondensators** kann folgendermassen berechnet werden (wenn man davon ausgeht, dass die elektrischen Feldlinien im Inneren des Kondensators parallel verlaufen und Randeffekte vernachlässigt werden können) ...

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{DA}{\int_E ds} = \frac{\epsilon EA}{Ed} = \epsilon \frac{A}{d} \quad C = \epsilon \frac{A}{d}$$

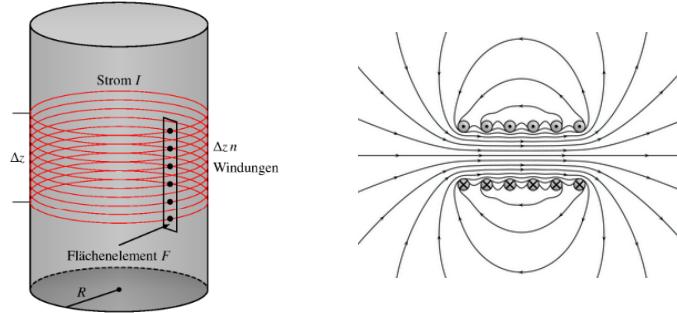
Die Kapazitäten für einige Geometrien sind in der folgenden Tabelle aufgeführt ...

Bezeichnung	Kapazität	Geometrie
Zweiplattenkondensator	$C = \epsilon \frac{A}{d}$	
Zylinderkondensator	$C = 2\pi\epsilon \frac{L}{\ln[R_2/R_1]}$	
Kugelkondensator	$C = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$	

## Spule und Spulengleichung ( $\ddot{Q} = \frac{1}{L} U$ )

### Stationärer Zustand

Zunächst wollen wir das Magnetfeld einer Spule (im stationären Zustand, bei konstantem Strom) mit Hilfe der vierten Maxwell-Gleichung berechnen. Bei einer sehr langen und geraden Spule weiß man, dass das Magnetfeld im Wesentlichen nur im Inneren vorhanden ist und dass es dort homogen und parallel zur Spulenachse orientiert ist. Wir legen die Fläche  $S$  so wie in der folgenden Abbildung ...



**Abbildung** a) Zur Bestimmung der Magnetfelds  
b) Magnetfeld einer Spule (Link)

Mit den Bezeichnungen  $s = \Delta z$  und  $n = \text{Anzahl Windungen}$  folgt ...

$$(4)' \quad \oint_{\partial F} \vec{B} \cdot d\vec{s} \stackrel{(4)'}{=} \mu_0 \int_F \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

So erhalten wir die Gleichung ...

$$B s = n \mu_0 I \quad \rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 n I}{s}$$

Die Richtung des Magnetfeldes können wir mit Hilfe der Rechte-Hand Regel bestimmen.

Die Feldenergie, die im Innern der Spule steckt, berechnet sich mit  $w = \frac{1}{2} \mu_0 B^2$  zu ...

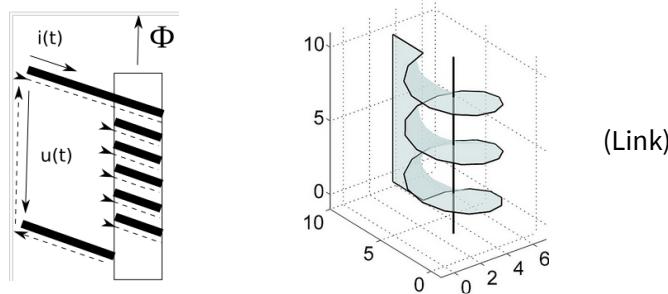
$$\text{Energie}_{\text{Spule}} = V * w = (\pi r^2 s) * \left( \frac{1}{2 \mu_0} B^2 \right) = (\pi r^2 s) * \left( \frac{1}{2 \mu_0} \left( \frac{\mu_0 n I}{s} \right)^2 \right) = \frac{\pi \mu_0 r^2 n^2 I^2}{2 s}$$

### Spulengleichung

Ein wechselnder Strom verursacht eine wechselnde Spannung über der Spule. Wir können den Zusammenhang mit Hilfe der Maxwell-Gleichung (3)' ...

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \Phi_{B,S}$$

herleiten. Wir wählen den folgenden Weg für die Integration ...



**Abbildung** Integrationsweg (a) und Fläche (b) bei einer Spule mit drei Windungen

Berücksichtigt man, dass die elektrische Feldstärke im Leiter näherungsweise gleich null ist, so speist sich das Ringintegral über die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  ausschliesslich aus der negativen Klemmenspannung  $-u[t]$ . Das negative Vorzeichen kommt daher, dass der Integrationsweg entgegen der Pfeilrichtung der Klemmenspannung durchlaufen wird. Somit gilt für die linke Seite der obigen Gleichung ...

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = -u[t]$$

Bei linearem Kernverhalten sind der magnetische Fluss  $\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$  durch die Gesamtspule und der Strom  $i[t]$  zueinander proportional, so dass man einen Proportionalitätsfaktor  $L$  (die sog. **Induktivität**) einführen kann. Es gilt dann für die rechte Seite der obigen Gleichung ...

$$-\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} (L i[t]) = -L \frac{d}{dt} i[t]$$

Zusammengenommen führt dies auf die sogenannte **Spulengleichung** ...

$$u[t] = L \frac{d}{dt} i[t] = L \ddot{q}[t] \quad \text{Spulengleichung}$$

## Wechselstromverhalten

Wird eine Spule an Wechselspannung angelegt, so wechseln der Strom und das Magnetfeld ebenfalls periodisch ihre Richtung. Zwischen dem zeitlichen Verlauf des Spulenstromes  $i[t]$  und der Klemmenspannung  $u[t]$  gilt die sogenannte Spulengleichung  $u[t] = L \frac{d[i[t]]}{dt}$ .

Da der Strom wegen des Energietransports in das magnetische Feld nur allmählich steigen bzw. fallen kann, folgt er dem Verlauf der Spannung stets mit zeitlicher Verzögerung; er ist phasenverschoben. Unter idealen Bedingungen (bei vernachlässigbar kleinem ohmschen Widerstand) eilt die Wechselspannung dem Strom um  $90^\circ$  voraus. Es besteht eine Trägheit der Spule gegen Stromänderungen.

Wir sehen dies auch, wenn wir für den Strom den folgenden Ansatz machen ...

$$i[t] = \hat{i} \sin[\omega t]$$

Dann folgt für die Spannung ...

$$u[t] = L \frac{d[i[t]]}{dt} = L \hat{i} \omega \cos[\omega t]$$

und wir sehen, dass die Spannung dem Strom um  $90^\circ$  vorausläuft.

Ausführlicher wird das im Abschnitt "Wechselstromkreis" im Kapitel "Stromkreise" behandelt werden.

## Transformator

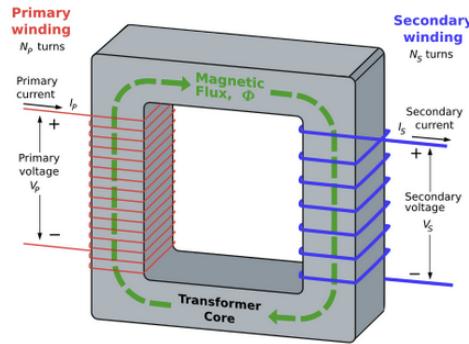
Ein Transformator (Link) besteht meist aus zwei oder mehr Spulen (Wicklungen), die in der Regel aus isoliertem Kupferdraht gewickelt sind und sich auf einem gemeinsamen Eisenkern befinden. Ein Transformator wandelt eine Eingangswechselspannung, die an einer der Spulen angelegt ist, in eine Ausgangswechselspannung um, die an der anderen Spule abgegriffen werden kann. Dabei entspricht das Verhältnis von Eingangs- und Ausgangsspannung  $U$  dem Verhältnis der Windungszahlen  $N$  der beiden Spulen (1 für primary, 2 für secondary) ...

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad \text{bzw.} \quad U_2 = \frac{N_2}{N_1} U_1$$

denn gemäss Induktionsgesetz gilt ...

$$U_1 = -N_1 \frac{d\phi}{dt} \quad \text{und} \quad U_2 = -N_2 \frac{d\phi}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

da der magnetische Fluss bzw. die Änderung des magnetischen Flusses auf beiden Windungen gleich ist. Je nach Wahl der Anzahl Windungen kann die Ausgangsspannung höher oder tiefer als die Eingangsspannung sein.



**Abbildung** Transformer (Link)

Ein Transformator funktioniert folgendermassen ...

- Eine Wechselspannung  $u_1[t]$  am Eingang führt zu einem Wechselstrom  $i_1[t]$ .
- Dieser sich ändernde Strom  $i_1[t]$  induziert in der Primärspule links ein sich änderndes Magnetfeld.
- Dieses sich verändernde Magnetfeld ist auch auf der rechten Seite vorhanden, da die magnetischen Feldlinien entlang des Eisenkerns verlaufen.
- Dieser sich ändernde magnetische Fluss auf der rechten Seite verursacht in der Sekundärspule durch Induktion die Sekundärspannung  $u_2[t]$

Schliesst man auf der rechten Seite eine Last an, so fliesst durch die Sekundärspule der Sekundärstrom der Stärke  $i_2[t]$ . Die Ströme verhalten sich (bei idealen Transformatoren) gemäss ...

$$\frac{i_2[t]}{i_1[t]} = \frac{N_1}{N_2} \quad \text{bzw.} \quad i_2[t] = \frac{N_1}{N_2} i_1[t]$$

Dies muss so sein wegen der Energieerhaltung (gleiche Leistung) ...

$$P_1 = P_2. \quad \text{d.h.} \quad i_1[t] u_1[t] = i_2[t] u_2[t] \quad \frac{i_2[t]}{i_1[t]} = \frac{u_1[t]}{u_2[t]} = \frac{N_1}{N_2}$$

In der Realität stimmen diese Gleichungen nicht genau, denn ...

- die Wicklungen der Spulen haben Widerstände und parasitäre Kapazitäten,
- im Eisenkern treten Wirbelstrom- und Ummagnetisierungsverluste auf,
- nicht der gesamte magnetische Fluss, den die Primärwicklung erzeugt, führt auch durch die Sekundärwicklung; es tritt ein Streufluss auf.
- der Kern verträgt nur eine begrenzte Flussdichte bis zur Sättigungsmagnetisierung.

# Stromkreise

## Einleitung

In diesem Kapitel werden wir uns mit Stromkreisen beschäftigen. Ein Stromkreis enthält verschiedene elektrische oder elektronische Bauteile. Dabei spielen die physikalischen Größen Spannung  $U$  und Stromstärke / eine wichtige Rolle.

Zunächst gehen wir auf die Messung dieser beiden Größen ein.

Dann untersuchen wir die bei der Analyse wichtigen physikalischen Gesetze ...

- die beiden **Kirchhoff**schen Gesetze
- $U = RI$  bei ohm'schen Widerständen
- $P = UI$  bei ohm'schen Widerständen

## Messung von Stromstärke und Spannung

### Einleitung

Wie häufig in der Messtechnik wird zur Bestimmung einer physikalischen Größe  $A$  eine andere (von dieser Größe abhängige) Größe  $B$  gemessen und dann aus dem bekannten Zusammenhang die physikalische Größe  $A$  bestimmt.

### Strommessung

- Beim **Hitzdrahtinstrument** erwärmt und verlängert sich ein stromdurchflossener Messdraht. Die Verlängerung ist ein Maß für die Stärke des Stromes.
- Beim **Drehspulinstrument** befindet sich im Feld eines Dauermagneten eine drehbar gelagerte Spule. Wird sie vom zu messenden Strom durchflossen, so entsteht durch Überlagerung beider Magnetfelder ein Drehmoment. Der Ausschlagwinkel ist ein Maß für die Stärke des Stromes.

Bei der Strommessung wird der Strom an einem Punkt gemessen. Beim Strommessgerät fließt deshalb der Strom durch das Messgerät hindurch (Hauptschluss). Damit am Messgerät kein nennenswerter Spannungsabfall stattfindet (und damit die Situation die gleiche wie ohne Messgerät ist) muss das **Strommessgerät** einen **möglichst kleinen Innenwiderstand** haben.

### Spannungsmessung

Zur Messung der Spannung bzw. der Spannungsdifferenz zwischen zwei Punkten (vor und nach dem elektrischen Bauteil) muss das Messgerät an diesen zwei Punkten angeschlossen werden. Das Messgerät liegt deshalb parallel zur messenden Spannung (Nebenfluss). Damit möglichst kein Strom durch das Spannungsmessgerät fließt (und damit die Situation die gleiche wie ohne Messgerät ist), sollte das **Spannungsmessgerät** einen **möglichst grossen Innenwiderstand** haben.

## Kirchhoff'sche Gesetze

### Kirchhoff'scher Maschensatz

Der **Kirchhoff'sche Maschensatz** besagt ...

In jeder Masche eines unter Umständen verzweigten Stromkreises ist die Summe aller Spannungsdifferenzen (mit entsprechendem Vorzeichen) gleich 0.

Der Spannungsabfall zwischen zwei Punkten A und B entspricht der Potentialdifferenz  $\varphi[B] - \varphi[A]$  zwischen den zwei Punkten A und B. Diese Potentialdifferenz ist auch gleich der Energiedifferenz pro Ladung. Der Kirchhoff'sche Maschensatz besagt somit, dass eine Ladung, die im Kreis herumgeführt wird, am Schluss wieder die gleiche potentielle Energie hat.

Die obige Formulierung ist gleichbedeutend mit der folgenden ...

Die Spannungsdifferenz zwischen Punkt A und Punkt B ist unabhängig vom Weg.

### Kirchhoff'scher Knotenpunktsatz

Der **Kirchhoff'sche Knotenpunktsatz** besagt ...

In einer Stromverzweigung (Knotenpunkt) ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme.

Wenn dies nicht so wäre, dann würde sich im Knotenpunkt die Ladung anhäufen oder mehr Ladung heraus- als hineinfliessen. Beides ist in einem Stromkreis nicht möglich.

## Gleichstromkreise

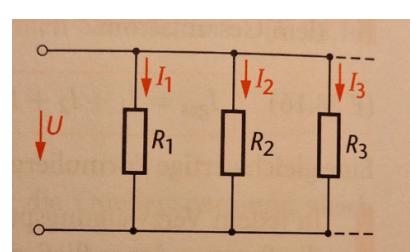
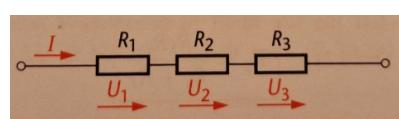
### Ersatzwiderstände, Ersatzkapazität, Ersatzinduktivität

Bei Berechnungen in Stromkreisen können mehrere Bauteile durch ein einziges Bauteil ersetzt werden. Dieses Ersatzbauteil hat die gleiche Wirkung wie die separaten Bauteile zusammen: Es liefert bei der gleichen Spannung den gleichen Strom.

Beispielsweise hat ein ohm'scher Widerstand von  $3 \text{ k}\Omega$  die gleiche Wirkung wie zwei ohm'sche Widerstände mit  $1.5 \text{ k}\Omega$ , die in Serie angeordnet werden.

Wir werden im Folgenden Reihen- und Parallelschaltungen von ohm'schen Widerständen, Kondensatoren und Spulen diskutieren (Link).

### Widerstände in Serie und parallel



**Abbildung** Widerstände (a) in Reihe und (b) parallel (Kuchling Seite 427/428)

## Reihenschaltung

Wenn beispielsweise drei verschiedene Ohm'sche Widerstände in Serie angeordnet sind, dann berechnet sich der Ersatzwiderstand mit Hilfe der Definition des ohm'schen Widerstands ( $U = R I$ ) zu ...

$$R_{\text{Ersatz}} = R_1 + R_2 + R_3$$

## Widerstände in Serie

denn es gilt ...

$$U_{\text{gesamt}} = U_1 + U_2 + U_3 \quad \text{Kirchhoff'scher Maschensatz}$$

$$I_{\text{gesamt}} = I_1 = I_2 = I_3 \quad \text{Stromerhaltung}$$

und damit ...

$$R_{\text{Ersatz}} \stackrel{\text{URI}}{=} \frac{U_{\text{gesamt}}}{I_{\text{gesamt}}} = \frac{U_1 + U_2 + U_3}{I_{\text{gesamt}}} = \frac{U_1}{I_{\text{gesamt}}} + \frac{U_2}{I_{\text{gesamt}}} + \frac{U_3}{I_{\text{gesamt}}} = \frac{U_1}{I_1} + \frac{U_2}{I_2} + \frac{U_3}{I_3} \stackrel{\text{URI}}{=} R_1 + R_2 + R_3$$

## Parallelschaltung

Wenn beispielsweise drei verschiedene Ohm'sche Widerstände parallel angeordnet sind, dann berechnet sich der Ersatzwiderstand mit Hilfe der Definition des ohm'schen Widerstands ( $U = R I$ ) zu ...

$$R_{\text{Ersatz}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1}$$

## Widerstände parallel

denn es gilt ...

$$U_{\text{gesamt}} = U_1 = U_2 = U_3 \quad \text{Kirchhoff'scher Maschensatz}$$

$$I_{\text{gesamt}} = I_1 + I_2 + I_3 \quad \text{Kirchhoff'scher Knotenpunktsatz}$$

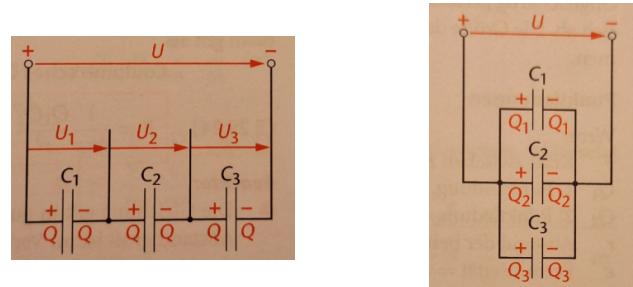
und damit ...

$$R_{\text{Ersatz}} \stackrel{\text{URI}}{=} \frac{U_{\text{gesamt}}}{I_{\text{gesamt}}} = \frac{U_{\text{gesamt}}}{I_1 + I_2 + I_3} = \frac{1}{\frac{I_1 + I_2 + I_3}{U_{\text{gesamt}}}} = \frac{1}{\frac{I_1}{U_{\text{gesamt}}} + \frac{I_2}{U_{\text{gesamt}}} + \frac{I_3}{U_{\text{gesamt}}}} = \frac{1}{\frac{I_1}{U_1} + \frac{I_2}{U_2} + \frac{I_3}{U_3}} \stackrel{\text{URI}}{=} \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1}$$

Parallelschaltungen können einfacher mit Hilfe des elektrischen Leitwerts ausgedrückt werden ...

$$G_{\text{Ersatz}} = \frac{1}{R_{\text{Ersatz}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = G_1 + G_2 + G_3$$

## Kondensatoren in Serie und parallel



**Abbildung** Kondensatoren (a) in Reihe und (b) parallel (Kuchling Seite 445)

## Reihenschaltung

Wenn beispielsweise drei verschiedene Kondensatoren in Serie angeordnet sind, dann berechnet sich die Ersatzkapazität mit Hilfe der Definition der Kapazität ( $Q = C U$ ) zu ...

$$C_{\text{Ersatz}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)^{-1}$$

## Kondensatoren in Serie

denn es gilt (im stationären Zustand) ...

$$U_{\text{gesamt}} = U_1 + U_2 + U_3$$

Kirchhoff'scher Maschensatz

$$Q_{\text{gesamt}} = Q_1 = Q_2 = Q_3$$

Ladungen separieren zu den einzelnen Platten

und damit ...

$$C_{\text{Ersatz}} \stackrel{\text{QCU}}{=} \frac{Q_{\text{gesamt}}}{U_{\text{gesamt}}} = \frac{Q_{\text{gesamt}}}{U_1 + U_2 + U_3} = \frac{1}{\frac{U_1}{Q_{\text{gesamt}}} + \frac{U_2}{Q_{\text{gesamt}}} + \frac{U_3}{Q_{\text{gesamt}}}} = \frac{1}{\frac{U_1}{Q_1} + \frac{U_2}{Q_2} + \frac{U_3}{Q_3}} \stackrel{\text{QCU}}{=} \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)^{-1}$$

### Parallelschaltung

Wenn beispielsweise drei verschiedene Kondensatoren parallel angeordnet sind, dann berechnet sich die Ersatzkapazität mit Hilfe der Definition der Kapazität ( $Q = CU$ ) zu ...

$$C_{\text{Ersatz}} = C_1 + C_2 + C_3$$

**Kondensatoren parallel**

denn es gilt (im stationären Zustand) ...

$$U_{\text{gesamt}} = U_1 = U_2 = U_3$$

Kirchhoff'scher Maschensatz

$$Q_{\text{gesamt}} = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

Ladungen addieren sich

und damit ...

$$C_{\text{Ersatz}} \stackrel{\text{QCU}}{=} \frac{Q_{\text{gesamt}}}{U_{\text{gesamt}}} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{U_{\text{gesamt}}} = \frac{Q_1}{U_{\text{gesamt}}} + \frac{Q_2}{U_{\text{gesamt}}} + \frac{Q_3}{U_{\text{gesamt}}} = \frac{Q_1}{U_1} + \frac{Q_2}{U_2} + \frac{Q_3}{U_3} \stackrel{\text{QCU}}{=} C_1 + C_2 + C_3$$

### Spulen in Serie und parallel

#### Reihenschaltung

Wenn beispielsweise drei verschiedene Spulen in Serie angeordnet sind, dann berechnet sich die Ersatzinduktivität mit Hilfe der Beziehung ( $du = -L di$ ) zu ...

$$L_{\text{Ersatz}} = L_1 + L_2 + L_3$$

**Spulen in Serie**

denn es gilt ...

$$du_{\text{gesamt}} = du_1 + du_2 + du_3$$

Kirchhoff'scher Maschensatz

$$di_{\text{gesamt}} = di_1 = di_2 = di_3$$

Stromerhaltung

und damit ...

$$L_{\text{Ersatz}} = -\frac{du_{\text{gesamt}}}{di_{\text{gesamt}}} = -\frac{du_1 + du_2 + du_3}{di_{\text{gesamt}}} = -\frac{du_1}{di_1} - \frac{du_1}{di_1} - \frac{du_1}{di_1} = L_1 + L_2 + L_3$$

#### Parallelschaltung

Wenn beispielsweise drei verschiedene Spulen parallel angeordnet sind, dann berechnet sich der Ersatzwiderstand mit Hilfe der Beziehung ( $du = -L di$ ) zu ...

$$L_{\text{Ersatz}} = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}} = \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \right)^{-1}$$

**Spulen parallel**

denn es gilt ...

$$du_{\text{gesamt}} = du_1 = du_2 = du_3$$

Kirchhoff'scher Maschensatz

$$di_{\text{gesamt}} = di_1 + di_2 + di_3$$

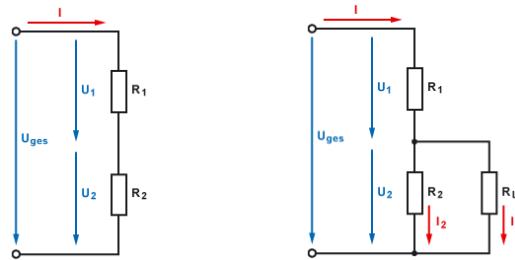
Kirchhoff'scher Knotenpunktsatz

und damit ...

$$L_{\text{Ersatz}} = -\frac{du_{\text{gesamt}}}{di_{\text{gesamt}}} = -\frac{du_{\text{gesamt}}}{di_1 + di_2 + di_3} = -\frac{1}{\frac{di_1 + di_2 + di_3}{du_{\text{gesamt}}}} = -\frac{1}{\frac{di_1}{du_1} + \frac{di_2}{du_2} + \frac{di_3}{du_3}} = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}} = \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \right)^{-1}$$

## Spannungsteiler

**Spannungsteiler** (Link, Link, Link) bestehen in der Regel aus einer Spannungsquelle  $U_0$  und zwei ohm'schen Widerständen  $R_1, R_2$  die in Reihe geschaltet sind.



**Abbildung** a) unbelasteter Spannungsteiler (Link)  
b) mit  $R_L$  belasteter Spannungsteiler (Link)

Der Spannungsabfall über dem Widerstand  $R_2$  ergibt sich (ohne Last) aus ...

$$\begin{aligned} \text{Strom} \quad I &= \frac{U_{\text{ges}}}{R_{\text{ges}}} = \frac{U_{\text{ges}}}{R_1 + R_2} \\ \text{Strom durch } R_2 \quad I &= \frac{U_2}{R_2} \end{aligned}$$

Gleichsetzen liefert ...

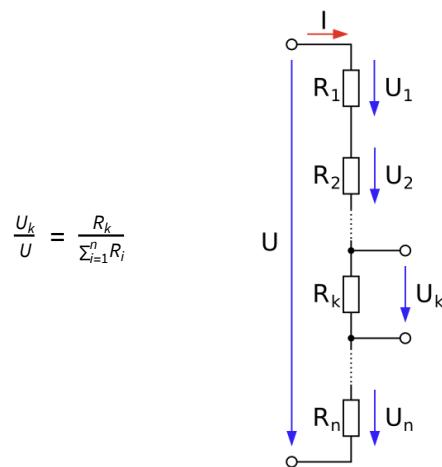
$$\frac{U_2}{R_2} = \frac{U_{\text{ges}}}{R_1 + R_2} \quad \text{oder} \quad \frac{U_2}{U_{\text{ges}}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{mit } I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} \rightarrow \frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Wird der Spannungsteiler mit einem Widerstand  $R_L$  belastet ( $R_L$  ist parallel zu  $R_2$ ), dann wird ...

- der Gesamtwiderstand kleiner,
- der Gesamtstrom grösser,
- die Teilspannung  $U_1$  am Widerstand  $R_1$  grösser und
- die Teilspannung  $U_2$  am Widerstand  $R_2$  kleiner.

Das heisst, dass die Widerstände  $R_1, R_2$  so dimensioniert werden müssen, dass der Lastwiderstand die Spannungsverhältnisse nicht (oder kaum) verändert.

Wir können das obige auf  $n$  Widerstände in Reihe ausdehnen und erhalten (Link) ...



Es gibt auch kontinuierlich einstellbare Spannungsteiler, die sogenannten **Potentiometer** (Link).

Die Spannungsteiler werden dazu benutzt, bestimmte (von der Spannungsquelle abweichende) Spannungen zu erzeugen.

## Ein- und Ausschaltvorgänge

### R Driftgeschwindigkeit

Wenn ein ohm'scher Widerstand  $R$  mit einer Spannungsquelle  $U_0$  verbunden wird, fliessst unmittelbar ein Strom gemäss URI ...

$$I = \frac{U}{R}$$

Der Widerstand führt dazu, dass elektrische Energie in Wärme (Stromwärme) umgewandelt wird. Die entsprechende Leistung ist ...

$$P = UI$$

Der unmittelbare Stromfluss bedeutet nicht, dass sich die Elektronen mit (fast) Lichtgeschwindigkeit bewegen.

Ohne Strom bewegen sich Elektronen mit sehr hohen Geschwindigkeiten, die etwa  $10^6$  m/s erreichen können. Sie kollidieren ständig mit den Atomrumpfen des Leiters. Diese Bewegung ist jedoch zufällig in alle Richtungen und diese Stromflüsse heben sich gegenseitig auf.

Ein angelegtes elektrisches Feld beschleunigt die Elektronen nur über eine kurze Strecke, bevor sie erneut kollidieren. Die (auf Grund eines elektrischen Feldes) gerichtete Bewegung, die für den Stromfluss verantwortlich ist, ist sehr langsam und wird **Driftgeschwindigkeit** genannt. Sie beträgt nur wenige Millimeter pro Sekunde, zum Beispiel 4.3 mm/s in einem Kupferleiter bei einer Feldstärke von 1 V/m.

Die Driftgeschwindigkeit  $\vec{v}_{\text{drift}}$  (Link) ist die durchschnittliche Geschwindigkeit bewegter Ladungsträger auf Grund eines äusseren Feldes. In elektrisch leitfähigen Medien ist die Driftgeschwindigkeit die Geschwindigkeit, die auf die Wirkung elektrischer Felder (gekennzeichnet durch ihre Feldstärke  $\vec{E}$ ) zurückzuführen ist. Solche Medien können z. B. metallische Leiter, Halbleiter, Lösungen von Elektrolyten oder auch Plasmen sein. Die **Beweglichkeit  $\mu$**  ist der Proportionalitätsfaktor zwischen dem anliegenden elektrischen Feld  $\vec{E}$  und der Driftgeschwindigkeit  $\vec{v}_{\text{drift}}$ :

$$\vec{v}_{\text{drift}} = \mu \vec{E} \quad [\mu] = \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$$

### RC Auf- und Abbau eines elektrischen Feldes

#### Aufladen

Ein Kondensator ist für eine Gleichspannung ein Bauteil mit einem  $\infty$  grossen Widerstand - absehen vom Einschalt- oder Abschaltvorgang. Beim Aufladen wird ein elektrisches Feld im Kondensator aufgebaut. Wir analysieren im Folgenden, wie dieser Prozess genau abläuft.

Aus der Definition der Kapazität ...

$$Q = C U_C$$

können wir das zeitliche Verhalten extrahieren ...

$$i = \frac{dQ}{dt} = C \frac{du}{dt} \quad \text{bzw.} \quad du = \frac{1}{C} i dt$$

Der Kirchhoff'sche Maschensatz liefert die Beziehung (siehe Abbildung unten) ...

$$U_0 = u_C[t] + u_R[t] = \frac{q[t]}{C} + R i[t] \stackrel{i_C = i_R}{=} \frac{q[t]}{C} + R \frac{dq}{dt}$$

mit  $U_0$ ,  $u_C$ ,  $u_R$  Ladespannung, Spannungsabfall beim Kondensator und Widerstand

$C$ ,  $R$  Kapazität, ohm'scher Widerstand

$q[t]$  Kondensatorladung

## Die Differentialgleichung ...

$$U_0 = \frac{q[t]}{C} + R \frac{dq}{dt}$$

mit der Anfangsbedingung  $q[0] = 0$  hat als Lösung ...

$$q[t] = C U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

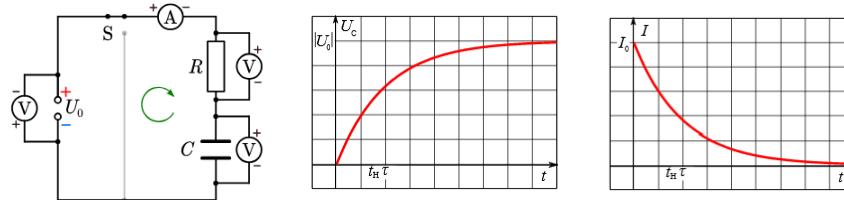
Daraus können wir auch das zeitliche Verhalten der Spannungsabfälle beim Kondensator und beim ohm'schen Widerstand bestimmen ...

$$u_C[t] = \frac{q[t]}{C} = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$u_C[0] = 0$$

$$i[t] = \frac{dq[t]}{dt} = C U_0 \left(-e^{-\frac{t}{RC}}\right) * \left(\frac{1}{RC}\right) = \frac{C U_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i[0] = \frac{U_0}{R} = I_0$$



**Abbildung** Aufladen eines Kondensators, Verlauf der Kondensatorspannung und des Stroms (Link)

Sowohl die Zunahme der Spannung als auch die Abnahme des Stroms folgen der Exponentialfunktion  $e^{-\frac{t}{RC}}$ . Die Grösse ...

$$\tau = \frac{1}{RC}$$

ist die sogenannte **Zeitkonstante** und hat die folgende Bedeutung: nach jeweils der Zeitdauer  $\tau$  nimmt der Funktionswert  $e^{-\frac{t}{\tau}}$  um den Faktor  $e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0.367879$  (d.h. auf zirka 36.8% des ursprünglichen Werts) ab.

Wir können den Aufladeprozess folgendermassen beschreiben ...

- Am Anfang ist der Kondensator nicht geladen: d.h. er hat die Ladung  $q = 0$ .
- Wenn der Kreis mit der Batterie geschlossen wird, fliessst anfänglich ein maximaler Strom.
- Während des Ladevorgangs baut sich auf den Kondensatorplatten eine Spannung auf, die der Spannung der Batterie entgegenwirkt.
- Die Stromstärke sinkt.
- Wenn die Spannung am Kondensator die Spannung der Spannungsquelle erreicht hat, fliessst kein Strom mehr und der Kondensator ist voll geladen.

Theoretisch wäre die Aufladezeit  $\infty$  gross, da die Exponentialfunktion erst im  $\infty$  auf 0 abgefallen ist: die Spannung am Kondensator hätte auch erst nach  $\infty$  langer Zeit die Spannung der Spannungsquelle erreicht. Wir können das zeitliche Verhalten in Abhängigkeit der Zeitkonstanten in einer Tabelle darstellen.

Zeit	0	$\tau$	$2\tau$	$3\tau$	$4\tau$	$5\tau$
$u_C[t]$ in %	0.	63.21	86.47	95.02	98.17	99.33
$i[t]$ in %	100.	36.78	13.54	4.98	1.84	0.68

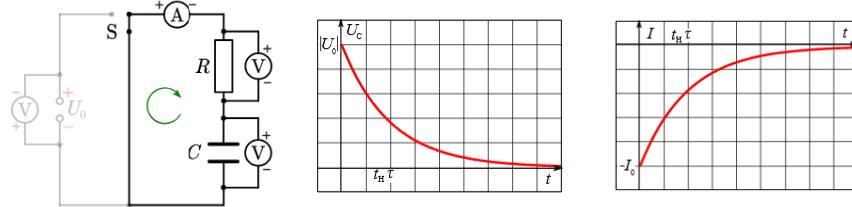
**Abbildung** Das zeitliche Verhalten der Kondensatorspannung und des Ladestroms.

## Entladen eines Kondensators

Beim Entladen gilt die gleiche Differentialgleichung (Kirchhoff'scher Maschensatz), aber mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen. Wir erhalten die folgenden Lösungen ...

$$u_C[t] = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad u_C[0] = U_0$$

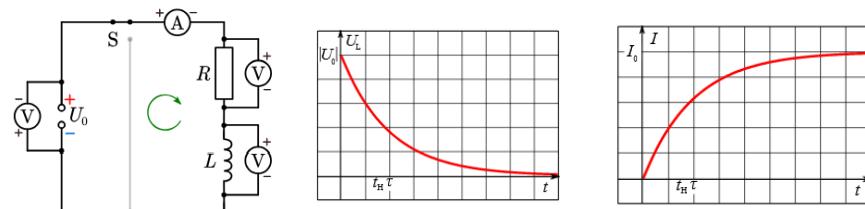
$$i[t] = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad i[0] = -\frac{U_0}{R} = -I_0 \quad \text{Gegenrichtung zum Ladestrom}$$



**Abbildung** Entladen eines Kondensators, Verlauf der Kondensatorspannung und des Stroms

## RL Auf- und Abbau eines Magnetfelds

Das Aufladen einer Spule ist der Prozess, bei dem in der Spule ein Magnetfeld aufgebaut wird. Nach dem Aufbau des Magnetfelds fließt ein konstanter Strom durch die Spule und den ohm'schen Widerstand.



**Abbildung** Einschaltvorgang (Link).

Um den Einschaltvorgang und den Ausschaltvorgang eines Stromkreises mit Batterie, Spule und ohm'schem Widerstand zu analysieren, gehen wir wieder vom Kirchhoff'schen Maschensatz aus ...

$$U_0 = u_L[t] + u_R[t]$$

$$U_0 = L \frac{di}{dt} + R i[t]$$

Diese Differentialgleichung hat die Lösung für den Strom ...

$$i[t] = \frac{U_0}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{LR}} \right) \quad i[0] = 0$$

und die Spannung über der Spule ergibt sich mit der **Zeitkonstanten**  $\tau = L/R$  zu ...

$$u_L[t] = L \frac{di}{dt} = L \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau} \left( \frac{R}{L} \right) = U_0 e^{-t/\tau} \quad u_L[0] = U_0$$

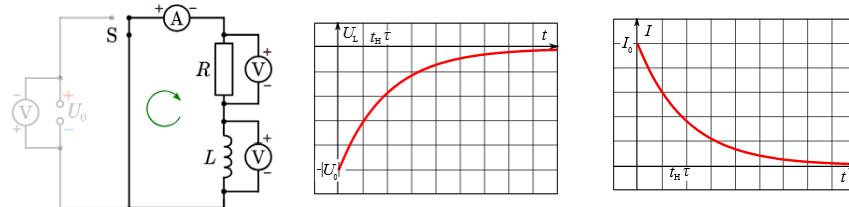
Wir könnten auch noch die zeitabhängige Leistung  $P$  über der Spule (zum Aufbau des Magnetfelds) berechnen ...

$$P[t] = u_L[t] i[t] = U_0 e^{-t/\tau} \frac{U_0}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = \frac{U_0^2}{R} \left( e^{-t/\tau} - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right)$$

Wir können den Aufladeprozess folgendermassen beschreiben ...

- Schliessen des Schalters: Beim Schliessen eines Schalters in einem Stromkreis mit einer Spule, einem ohm'schen Widerstand und einer Spannungsquelle kann Strom fliessen.
- Anfänglicher Zustand: Im Moment des Schliessens ist der Strom null. Da sich der Strom nicht sprunghaft ändern kann, entsteht eine hohe induzierte Spannung, die der anliegenden Spannung entgegenwirkt. Die gesamte Batteriespannung fällt anfänglich über der Spule ab.

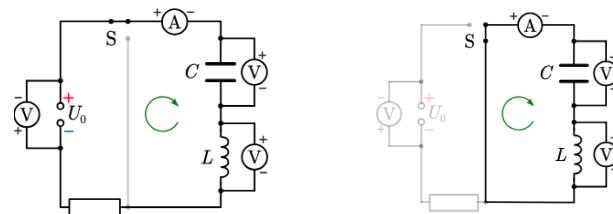
- Aufbau des Magnetfelds: Mit der Zeit steigt der Strom an. Dadurch baut sich ein Magnetfeld auf und die in der Spule gespeicherte Energie nimmt zu.
- Abnehmende Induktionsspannung: Da der Stromanstieg mit der Zeit geringer wird, nimmt auch die selbstinduzierte Spannung ab.
- Endzustand: Nach einer bestimmten Zeit (ca. fünfmal der Zeitkonstante  $\tau$ ) hat der Strom seinen maximalen Wert erreicht, der nur vom Gesamtwiderstand des Stromkreises abhängt. Die Spule wirkt nun wie ein stromführender Draht und das Magnetfeld ist stabil.



**Abbildung** Ausschaltvorgang (Link).

## RLC Schwingkreise

### Ungedämpfte Schwingung



**Abbildung** Aufladen des Kondensators (a) und Schwingvorgang (b). (Link)

#### Ablauf

- Der Schalter hat die Stellung, so dass Strom in der grossen Masche fliest.
- Am Ende des Ladevorgangs ist der Strom gleich 0 und die Kondensatorspannung beträgt  $U_0$ .
- Auf der oberen Platte befindet sich die Ladung  $Q = C U_0$ .
- Dann wird der Schalter geschlossen, so dass nun die kleine Masche den Stromkreis bzw. Schwingkreis darstellt.

Mit Hilfe der folgenden Beziehungen ...

$$u_C[t] = \frac{q[t]}{C} \quad \text{Kondensatorformel}$$

$$u_L[t] = L \frac{di[t]}{dt} \quad \text{Spulenformel}$$

$$i[t] = \dot{q}[t] \quad \text{Definition des Stroms}$$

und der Kirhoff'schen Maschendraht Regel folgt für den Schwingvorgang ...

$$u_C[t] + u_L[t] = 0$$

$$\frac{q[t]}{C} + L \frac{di[t]}{dt} = 0$$

$$q[t] + L C \ddot{q}[t] = 0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{q}[t] + \frac{1}{LC} q[t] = 0$$

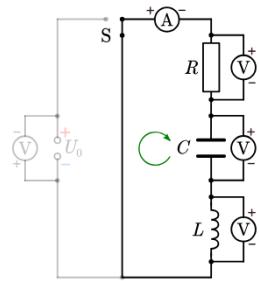
Diese Gleichung kommt uns bekannt vor: Stichwort ungedämpfte mechanische Schwingung.

$$y''[t] + \omega_0^2 y[t] = 0$$

Wir können deshalb die dortigen Ergebnisse übernehmen. Das heisst, diese Schwingung kann durch Sinus- und Cosinusfunktionen dargestellt werden und hat die Kreisfrequenz ...

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

## Gedämpfte Schwingung



**Abbildung** Gedämpfter Schwingkreis

Beim gedämpften Schwingkreis befindet sich zusätzlich ein ohm'scher Widerstand in der kleinen Masche (und nicht in der grossen Masche wie beim ungedämpften Schwingkreis. Dort wird der ohm'sche Widerstand nur zum Aufladen bzw. Festlegen der Anfangsbedingungen benötigt).

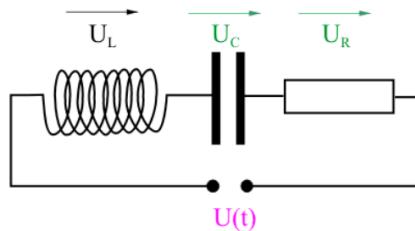
Die Kirchhoff'sche Maschenregel liefert uns ...

$$\begin{aligned} u_R[t] + u_C[t] + u_L[t] &= 0 \\ R \dot{q}[t] + \frac{1}{C} q[t] + L \ddot{q}[t] &= 0 \quad | \text{ durch } L \text{ teilen und umstellen} \\ \ddot{q}[t] + \frac{R}{L} \dot{q}[t] + \frac{1}{LC} q[t] &= 0 \end{aligned}$$

Wir werden das hier nicht vertiefen, aber es gibt wie bei den mechanischen Schwingungen die bekannten drei Fälle mit der Eigenkreisfrequenz  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  und dem Abklingkoeffizienten  $\delta = \frac{R}{2L}$ .

- $\delta < \omega_0$  Schwingfall
- $\delta = \omega_0$  aperiodischer Grenzfall
- $\delta > \omega_0$  Kriechfall

## Angeregte Schwingung



**Abbildung** Stromkreis mit einer anregenden Schwingung  $u_{\text{ext}}[t] = \hat{u}_{\text{ext}} \cos[\omega t]$

Die Differentialgleichung lautet ...

$$\frac{u_{\text{ext}}[t]}{L} = \ddot{q}[t] + \frac{R}{L} \dot{q}[t] + \frac{1}{LC} q[t]$$

Diese Differentialgleichung kann analog zur Differentialgleichung bei erzwungenen mechanischen Schwingungen untersucht werden. Wir erhalten nach der Einschwingzeit die Lösung ...

$$q[t] = \hat{q} \cos[\omega t - \alpha]$$

## Bemerkungen

- Schaltungen aus Widerstand, Kondensator und Spule verhalten sich analog zu mechanischen Schwingungen.
- Die äussere Wechselspannung entspricht der Anregung bei der erzwungenen Schwingung.
- Die Energie oszilliert zwischen elektrischer Feldenergie im Kondensator und magnetischer Feldenergie in der Spule.
- Der ohmsche Widerstand verursacht Dissipation (Erzeugung von Wärme) analog zur Reibung in der Mechanik.
- Abhängig von der anregenden Kreisfrequenz  $\omega$  und der Eigenkreisfrequenz  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  (des ungedämpften Schwingers) gibt es nach einer gewissen Einschwingzeit eine gewisse Amplitude  $\hat{q}$  und eine Phasenverschiebung  $\alpha$ .
- Es tritt Resonanz auf, wenn die anregende Frequenz nahe bei der Eigenfrequenz der Schwingung liegt.
- Bei der Resonanzfrequenz „springt“ die Phase um  $180^\circ$ .

## Wechselstromkreis

### Einleitung

Wir haben im letzten Abschnitt “RLC - Schwingkreise” gesehen, dass Stromkreise, die ohm’sche Widerstände, Spulen und Kondensatoren enthalten, mit Hilfe von Differentialgleichungen analysiert werden können. Bei sinusförmigen Wechselströmen und Wechselspannungen ...

$$u[t] = \hat{u} \sin[\omega t]$$

gibt es zur Analyse von Wechselstromkreisen ein vereinfachtes Verfahren mit Hilfe von Zeigern. Dies werden wir in diesem Abschnitt genauer untersuchen.

### Effektivwerte von Strom, Spannung und Leistung

Beim Gleichstromkreis mit ohm’schen Widerständen war die zeitunabhängige Leistung gegeben durch die Beziehung

$$P = UI = RI^2 = \frac{1}{R} U^2 \quad \text{PUI}$$

Die Leistung ist proportional zu  $I^2$  und  $U^2$ .

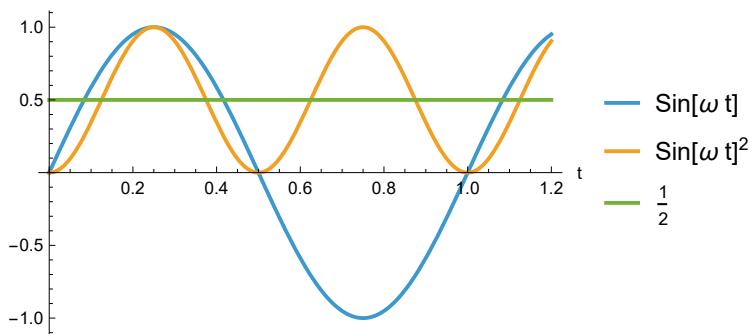
Beim sinusförmigen Wechselstromkreis haben wir zeitabhängige Spannungen  $u[t]$  und Ströme  $i[t]$ . Die Wechselspannung  $u[t]$ , die die gleiche durchschnittliche Leistung erbringt wie ein Gleichstromkreis mit der Spannung  $u_{\text{eff}}$ , erhalten wir durch Integration von  $u[t]^2$  über eine Periode  $T$  und anschliessendes Wurzelziehen ...

$$u_{\text{eff}}^2 = \int_0^T (\hat{u} \sin[\omega t])^2 dt = \hat{u}^2 \int_0^T \sin^2[\omega t] dt = \hat{u}^2 \frac{1}{2}$$

$$u_{\text{eff}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \approx 0.707 \hat{u}$$

Und analog für den Strom ...

$$i_{\text{eff}} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \approx 0.707 \hat{i}$$



**Abbildung** Die Funktionen  $\sin[\omega t]$  und  $\sin[\omega t]^2$

Man sieht, dass der durchschnittliche Wert von  $\sin[\omega t]^2$  gleich  $\frac{1}{2}$  ist.

Für die momentane Leistung beim Wechselstrom gilt ...

$$P[t] = u[t] * i[t] = R i[t]^2 = \frac{1}{R} u[t]^2$$

und für die durchschnittliche, effektive Leistung  $P_{\text{eff}}$  ...

$$P_{\text{eff}} = \int_0^T (\hat{u} \sin[\omega t] * \hat{i} \sin[\omega t]) dt = \hat{u} \hat{i} \int_0^T \sin[\omega t]^2 dt = \hat{u} \hat{i} \frac{1}{2} = u_{\text{eff}} i_{\text{eff}}$$

Dies ergibt die gleiche Formel wie beim Gleichstrom. Nur sind hier die Effektivwerte für Spannung und Strom einzusetzen.

Bemerkung

- Die Formeln für die Effektivwerte gelten nur bei sinusförmigen Spannungen und Strömen.
- Im Gegensatz zum Mittelwert der quadrierten Spannungen  $\overline{u[t]^2} = u_{\text{eff}}^2$  ist der Durchschnittswert der Spannung  $u[t]$  gleich 0, d.h.  $\overline{u[t]} = 0$ . Die positiven und negativen Spannungen heben sich auf.
- In Wechselstromkreisen wird häufig der Index "eff" weggelassen:  $u_{\text{eff}} \rightarrow u$ .

## Wechselstromwiderstand von $R$ , $L$ und $C$

### Einleitung

Wenn sich im Wechselstromkreis neben ohm'schen Widerständen auch Kapazitäten oder Induktivitäten befinden, dann erreichen die Spannungen und Ströme ihre Maximalwerte nicht zur gleichen Zeit. Wir werden dies im Folgenden genauer untersuchen.

### Komplexe Zahlen (Mathematik)

Die Berechnungen an (sinusförmigen) Wechselstromkreisen geschieht am einfachsten mit Hilfe der komplexen Zahlen. Auf diese Weise können ...

- Phasenbeziehungen einfach dargestellt werden und
- Gesamtwiderstände einfach berechnet und dargestellt werden.

### Ohm'scher Widerstand

Der Widerstand, der sich für einen Leiter gemäss  $R = \frac{\rho L}{A}$  berechnet, gilt sowohl für Gleichstrom als auch für Wechselstrom und wird mit ohm'schem Widerstand oder **Wirkwiderstand** bezeichnet.

Der Wechselstromkreis kann zusätzlich zum Wirkwiderstand auch noch so genannte **Blindwiderstände** enthalten. Sie verwandeln aber keine elektrische Energie in Wärme.

Die komplexe Addition dieser beiden Widerstände ergibt den sogenannten **Scheinwiderstand**.

## Induktiver Widerstand

Wir erinnern uns an die Spulengleichung.

$$u[t] = L \frac{d}{dt} i[t] = L \ddot{q}[t] \quad \text{Spulengleichung}$$

Eine Induktivität  $L$  wirkt auf die Änderung des Stroms verzögernd, denn ...

$$i[t] = \hat{i} \sin[\omega t]$$

$$u[t] = L \frac{d i[t]}{dt} = L \hat{i} \omega \cos[\omega t]$$

Zwischen Spannung und Strom besteht eine Phasendifferenz (Phasenverschiebung) von  $90^\circ$  bzw.  $\pi/2$ . In jedem Wechselstromkreis mit reiner Induktivität eilt die Spannung dem Strom voraus.

Für den Maximalwert der Spannung folgt aus obiger Ableitung ...

$$\hat{u} = \omega L \hat{i}$$

Ein Vergleich mit dem Ohm'schen Gesetz  $U = R I$  zeigt, dass das Produkt  $\omega L$  wie ein Widerstand wirkt.

In jedem Wechselstromkreis mit einer Induktivität  $L$  gibt es einen Wechselstromwiderstand  $\omega L$ . Er wird mit **“induktiver Widerstand  $X_L$ ”** bezeichnet.

$$X_L = \omega L \quad [X_L] = \text{Ohm} (\Omega)$$

Bemerkung

- Der induktive Widerstand  $X_L$  wächst mit der Frequenz, denn  $X_L$  ist proportional zu  $\omega$ .
- Bei Gleichstrom ist  $X_L = 0$ .
- Bei nur induktivem Widerstand ergibt sich  $i_{\text{eff}} = \frac{u_{\text{eff}}}{\omega L}$

## Kapazitiver Widerstand

Wir erinnern uns an die Kondensatorgleichung.

$$Q = C U \quad [C] = \text{Farad} = \frac{C}{V} = \frac{As}{V}$$

Das bedeutet auch ...

$$\dot{q} = i[t] = C \dot{u}[t]$$

Für eine sinusförmige Spannung gilt ...

$$u[t] = \hat{u} \sin[\omega t]$$

$$i[t] = C \frac{du[t]}{dt} = C \hat{u} \omega \cos[\omega t]$$

Zwischen Spannung und Strom besteht eine Phasendifferenz (Phasenverschiebung) von  $90^\circ$  bzw.  $\pi/2$ . In jedem Wechselstromkreis mit reiner Kapazität eilt der Strom der Spannung voraus (oder die Spannung dem Strom hinterher).

Für den Maximalwert der Spannung folgt aus obiger Ableitung ...

$$\hat{i} = \omega C \hat{u}$$

Ein Vergleich mit dem Ohm'schen Gesetz  $U = R I$  zeigt, dass der Ausdruck  $\frac{1}{\omega C}$  wie ein Widerstand wirkt.

In jedem Wechselstromkreis mit einer Kapazität  $C$  gibt es einen Wechselstromwiderstand  $\frac{1}{\omega C}$ . Er wird mit **“kapazitiver Widerstand  $X_C$ ”** bezeichnet.

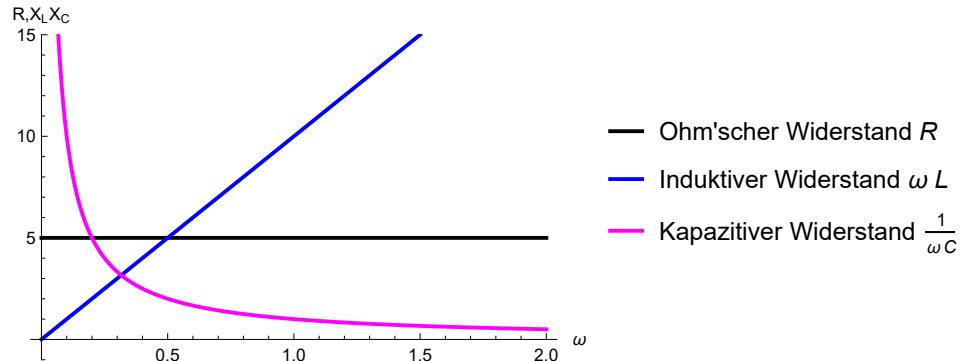
$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad [X_C] = \text{Ohm} (\Omega)$$

### Bemerkung

- Der kapazitive Widerstand  $X_C$  nimmt mit der Frequenz ab, denn  $X_C$  ist umgekehrt proportional zu  $\omega$ .
- Bei Gleichstrom ist  $X_C = \infty$ .
- Bei nur kapazitivem Widerstand ergibt sich  $i_{\text{eff}} = \omega C u_{\text{eff}}$

### Impedanzen

Diese Wechselstromwiderstände  $R$ ,  $X_L$  und  $X_C$  werden mit Impedanz bezeichnet. Wir haben die folgenden frequenzabhängigen Impedanzen.



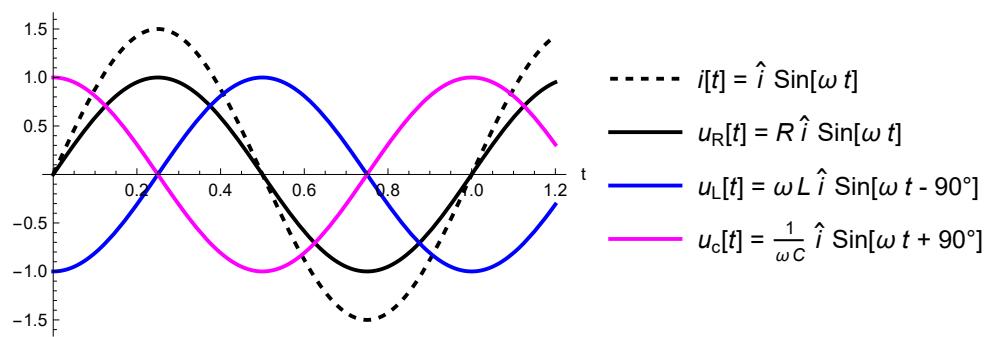
**Abbildung** Frequenzabhängigkeit der ohm'schen, induktiven und kapazitiven Widerstände

### Zeigerdiagramme

Wir haben gesehen, dass ...

- bei ohm'schen Widerständen Spannung und Strom synchron verlaufen und der Widerstand  $X_R = R$  beträgt.
- bei induktiven Widerständen die Spannung dem Strom vorausläuft und der Widerstand  $X_L = \omega L$  beträgt.
- bei kapazitiven Widerständen die Spannung dem Strom hinterherläuft und der Widerstand  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  beträgt.

Wir können das alles folgendermassen darstellen ...



**Abbildung** Anschauliche Darstellung der Phasenbeziehung zwischen der Spannung und dem Strom bei reinen  $R$ ,  $L$  und  $C$  Stromkreisen. Angepasste Einheiten in der Vertikalen.

Diese Amplituden und Phasen können auch gut in einem Zeigerdiagramm dargestellt werden. Es gilt ...

- Das Zeigerdiagramm basiert auf der Identität  $e^{i\omega t} = \cos[\omega t] + i \sin[\omega t]$ .
- Die Zahl  $i$  ist die imaginäre Einheit.
- Wenn die Zeit von  $t = 0$  aus erhöht wird, dann wandert der Wert  $e^{i\omega t}$  (der Zeiger) auf dem Einheitskreis im Gegenuhrzeigersinn.
- Die  $x$ -Koordinate entspricht dabei dem  $\cos[\omega t]$ .

- Die y-Koordinate entspricht dabei dem  $\sin[\omega t]$ .
- Wenn wir zwei um einen Winkel  $\alpha$  verschobene Zeiger  $e^{i\omega t}$  und  $e^{i(\omega t+\alpha)}$  in der Ebene vektoriell addieren oder algebraisch mit komplexen Zahlen berechnen, so entspricht die x-Koordinate der Addition von  $\cos[\omega t] + \cos[\omega t + \alpha]$  und die y-Koordinate der Addition von  $\sin[\omega t] + \sin[\omega t + \alpha]$ .
- So können wir anschaulich Cosinus-Werte und Sinus-Werte mit unterschiedlichen Argumenten addieren.

Für unsere Wechselstromkreise können wir die Zeigerdarstellung benutzen, um die Phasenverschiebungen der verschiedenen Widerstände anschaulich darzustellen. Wir benutzen dabei ...

$$\underline{X}_R = R$$

$\underline{X}_L = i\omega L$  Multiplikation mit  $i$  heisst Drehung um  $+90^\circ$  (vorauslaufend)

$\underline{X}_C = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}$  Multiplikation mit  $-i$  heisst Drehung um  $-90^\circ$  (hinterherlaufend)

und ...

$$i[0] = \hat{i}$$

Anfangsbedingung: am einfachsten zeigt der komplexe Stromvektor anfangs nach rechts.

$$u[0] = \underline{X} * i[0]$$

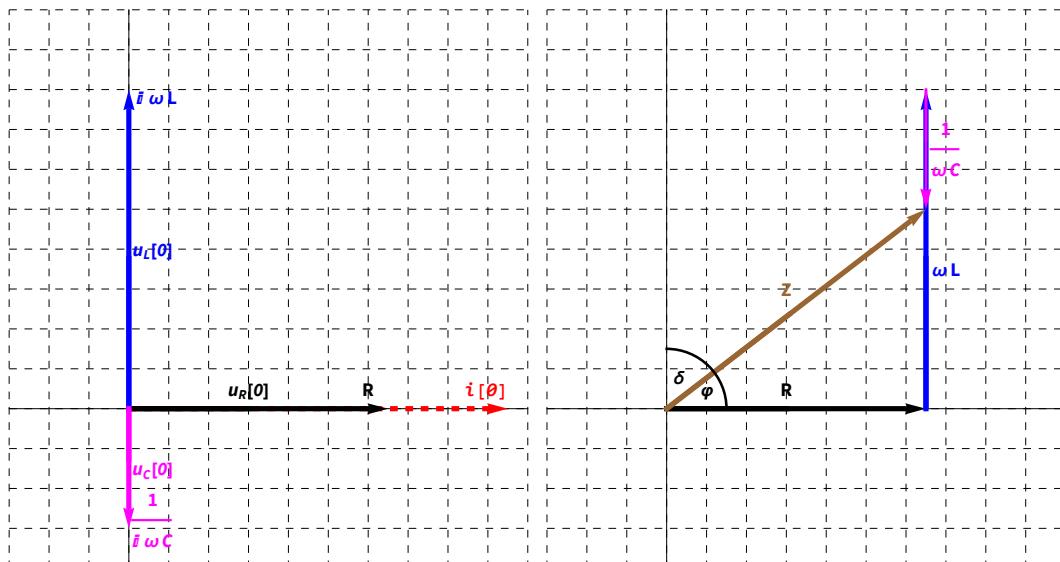
So zeigt anfangs  $u_R[0]$  nach rechts,  $u_L[0]$  nach oben und  $u_C[0]$  nach unten.

$$u[t] = \underline{X} * i[t] = \underline{X} * \hat{i} e^{i\omega t}$$

Dann rotieren die Spannungen mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ .

Der Strich unter dem  $X$  soll zeigen, dass es sich um eine komplexe Zahl handelt. Wenn der Betrag gemeint ist, dann wird das Formelzeichen  $X$  ohne den Strich darunter verwendet.

Damit ergibt sich die folgende Darstellung für die verschiedenen Impedanzen, Phasenverschiebungen und Spannungen zur Zeit  $t = 0$  ...



**Abbildung** a) Die Zeiger  $u_R[0]$ ,  $u_L[0]$  und  $u_C[0]$  und die entsprechenden Impedanzen.  
b) Addition der drei Impedanzen (Reihenschaltung  $R, L, C$ ):  $Z = R + i\omega C + \frac{1}{i\omega C} + \frac{1}{i\omega C} = \frac{-1}{\omega C} i$ ; deshalb zeigt der magenta Pfeil nach unten.

Bemerkungen zu a)

- Für zunehmende Zeiten rotieren die komplexen Spannungen  $u[t]$  gemeinsam im Gegenuhrzeigersinn um den Koordinatenursprung.
- $u_R[0]$  ist synchron mit  $i[0]$ .
- $u_L[0]$  eilt dem Strom  $i[0]$  voraus.
- $u_C[0]$  eilt dem Strom  $i[0]$  hinterher.

Bemerkungen zu b)

- Der Realteil der Impedanz ist  $R$  und wird **Wirkwiderstand** genannt.
- Der Imaginärteil der Impedanz ist  $X = X_L - X_C$  und wird **Blindwiderstand** genannt.
- Der Betrag der vektoriellen Summe (bzw. komplexen Addition) ergibt den **Scheinwiderstand**  
 $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ .
- $\varphi$  ist die **Phasenverschiebung**. Sie wird berechnet mittels  $\varphi = \text{ArcTan}\left[\frac{X}{R}\right] = \text{ArcTan}\left[\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right]$ .
- $\delta$  ist der **Verlustwinkel**. Es gilt  $\delta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ .

## Rechnen mit Zeigern

Um den Ersatzwiderstand  $Z_{\text{Ersatz}}$  eines Wechselstromkreises zu berechnen, kann genau gleich wie beim Gleichstrom für ohm'sche Widerstände vorgegangen werden ...

- Bei Reihenschaltungen gilt  $Z_{\text{Ersatz}} = Z_1 + Z_2 + \dots$
- Bei Parallelschaltungen gilt  $Z_{\text{Ersatz}} = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots\right)^{-1}$
- Bei komplizierteren Stromkreisen werden wiederholt die Ersatzwiderstände der einzelnen Reihen- oder Parallelschaltungen berechnet.

### Beispiel R, L und C in Reihe

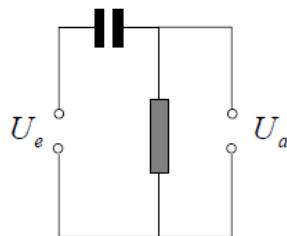
Wir erhalten für die Ersatzimpedanz ...

$$Z_{\text{Ersatz}} = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

- Der Wirkwiderstand ist gleich  $R$ .
- Für den Blindwiderstand  $X$  gilt:  $X = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ .
- Für den Scheinwiderstand gilt:  $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$
- Der Verlustwinkel  $\varphi$  ist gleich  $\text{ArcTan}\left[\frac{X}{R}\right] = \text{ArcTan}\left[\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right]$

Diese Berechnung ist viel einfacher und schneller als mit der Differentialrechnung!

### Beispiel Hochpassfilter



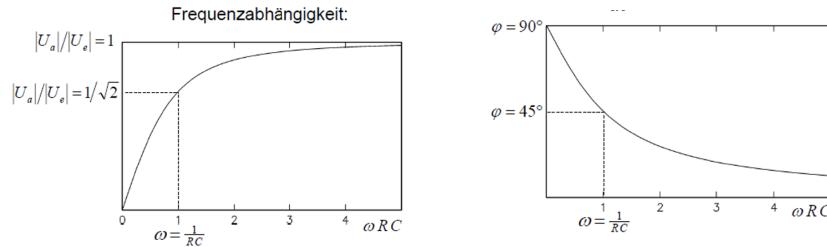
**Abbildung** Hochpassfilter (Link)

Gemäss Spannungsteilerschaltung erhalten wir ...

$$U_a = \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}} U_e$$

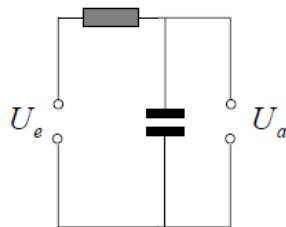
Nach einiger Rechnung erhält man für den Betrag und die Phase ...

$$Z = \frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \quad \text{und} \quad \varphi = \text{ArcTan}\left[\frac{1}{\omega RC}\right]$$



**Abbildung** Frequenzabhängigkeit der Amplitude (a) und der Phasenverschiebung (b)  
Wir sehen, dass die tiefen Frequenzen abgeschwächt werden.

### Beispiel Tiefpassfilter

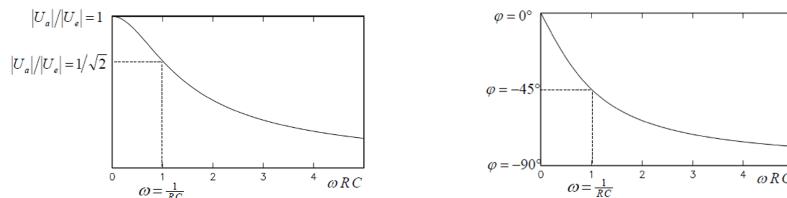


**Abbildung** Tiefpassfilter (Link)

$$U_a = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + \frac{1}{i\omega C}} U_e$$

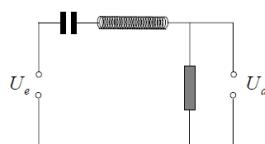
Nach einiger Rechnung erhält man für den Betrag und die Phase ...

$$Z = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \quad \text{und} \quad \varphi = \text{ArcTan}[-\omega RC]$$



**Abbildung** Frequenzabhängigkeit der Amplitude (a) und der Phasenverschiebung (b)  
Wir sehen, dass die hohen Frequenzen abgeschwächt werden.

### Bandpassfilter

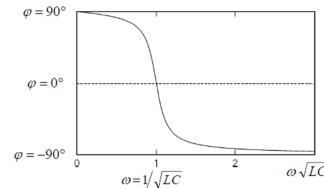
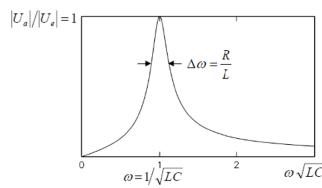


**Abbildung** Bandpassfilter (Link)

$$U_a = \frac{R}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} U_e$$

Nach einiger Rechnung erhält man für den Betrag und die Phase ...

$$Z = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad \text{und} \quad \varphi = \text{ArcTan} \left[ \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R} \right]$$



**Abbildung** Frequenzabhängigkeit der Amplitude (a) und der Phasenverschiebung (b)  
Wir sehen, dass vor allem ein schmales Frequenzband durchgelassen wird.

## Elektrische Arbeit und Leistung beim Wechselstromkreis

### Wirkleistung

Man muss zwischen Blindleistung und Wirkleistung unterscheiden. In einem Wechselstromkreis ohne ohmschen Widerstand wird keine Energie in Wärme umgesetzt. Die von Spule und Kondensator aufgenommene Energie wird im Feld gespeichert und bei der folgenden Halbwelle wieder abgegeben.

Im zeitlichen Mittel wird daher keine Leistung aufgenommen (Blindleistung). Die tatsächlich „verbrauchte“ (in andere Energieformen umgewandelte) Leistung ist die Wirkleistung:

$$\bar{P}_{\text{el}} = \frac{1}{T} \int_0^T u[t] * i[t] dt = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{u} \sin[\omega t + \varphi] * \hat{i} \sin[\omega t] dt = \frac{\hat{u} \hat{i}}{2} \cos[\varphi] = u_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \cos[\varphi]$$

- Bei Spule und Kondensator ist die Phasenverschiebung  $\varphi$  zwischen Strom und Spannung gerade  $\pm 90^\circ$ , d.h.  $\cos[\varphi] = 0$ , und daher die Wirkleistung gleich Null.
- Den Ausdruck  $\cos[\varphi]$  bezeichnet man als **Leistungsfaktor**.
- Nur in einem Wechselstromkreis **ohne** Blindwiderstand (d.h.  $\varphi = 0$ ) erreicht der Leistungsfaktor sein Maximum  $\cos[0^\circ] = 1$ .
- In einem Wechselstromkreis mit **nur** Blindwiderstand (d.h.  $\varphi = \pm 90^\circ$ ) wird der Leistungsfaktor  $\cos[\pm 90^\circ] = 0$ . Der Wechselstrom hat keine Wirkleistung (wattloser Strom).

Die Wirkleistung kann auch folgendermassen bestimmt werden ...

Wenn im Zeigerdiagramm  $U$  und  $I$  einen Phasenwinkel von  $\varphi$  einschliessen, dann ist die Wirkleistung das Produkt aus der effektiven Spannung und dem Wirkstrom (d.h. die Stromkomponente in Spannungsrichtung). Somit ...

$$P = U I_W = u_{\text{eff}} i_{\text{eff}} * \cos[\varphi] \quad [P] = \text{W}$$

### Blindleistung

In Analogie zu oben ist die Blindleistung das Produkt aus der effektiven Spannung und dem Blindstrom (d.h. die Stromkomponente senkrecht zur Spannungsrichtung). Somit ...

$$Q = U I_B = u_{\text{eff}} i_{\text{eff}} * \sin[\varphi] \quad [Q] = \text{W}$$

### Bemerkungen

- Blindströme belasten die Leitungen der Stromversorgungsnetze zusätzlich.
- Zur Senkung der Blindleistung muss deshalb der Phasenwinkel verkleinert werden.
- Dazu werden parallel zu Verbrauchern mit vorwiegend induktivem Widerstand (Transformatoren, Motorwicklungen, Drosselspulen u.a.) zur Kompensation zusätzliche kapazitive Widerstände (Phasenschieberkondensatoren) geschaltet.

## Scheinleistung

Die Scheinleistung ist ...

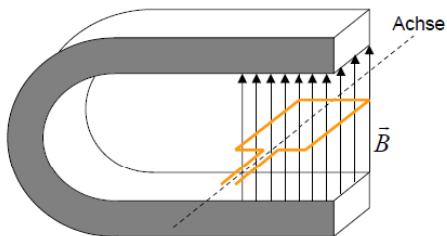
$$S = u_{\text{eff}} i_{\text{eff}} = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad [S] = \text{W}$$

# Elektrische Maschinen

## Generator

### Erzeugung einer Wechselspannung

Der einfachste Aufbau eines Generators ist eine drehbar gelagerte Leiterschleife im Magnetfeld.



**Abbildung** Leiterschleife in einem Magnetfeld (Link)

Wenn sich die Leiterschleife mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  dreht, dann ändert sich die senkrecht zum Magnetfeld projizierte Fläche der Leiterschleife gemäss ...

$$A[t] = A * \cos[\omega t] \quad \text{bei } t = 0 \text{ steht die Leiterschleife horizontal}$$

und die induzierte Spannung beträgt ...

$$U_{\text{ind.}} = \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{s} \stackrel{(3)}{=} -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} (B A * \cos[\omega t]) = \omega B A * \sin[\omega t]$$

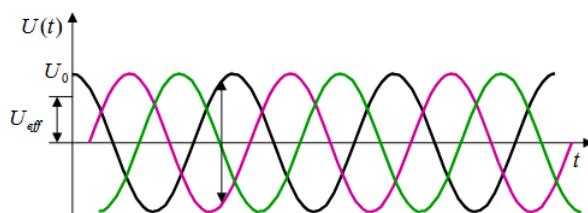
Es resultiert eine **Wechselspannung** ...

- mit der Amplitude  $\omega B A$
- und der Frequenz  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  und der Periodendauer  $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$

Zur Versorgung der Haushalte wird in Europa die Wechselspannung mit einer effektiven Spannung von **220 Volt** und einer Frequenz von 50 Hz verwendet. Die Amplitude beträgt  $\sqrt{2} * 220 \text{ V} \approx 311 \text{ V}$ .

## Drehstrom

Eigentlich stehen drei "Phasen" L1, L2 und L3 mit jeweils 220 V zur Verfügung, die jeweils eine um  $120^\circ$  phasenverschobene Wechselspannung gegenüber dem Nullleiter besitzen (Drehstrom).



**Abbildung** Die drei Phasen des Drehstroms (Link)

- Zwischen zwei Phasen misst man eine Spannungsamplitude von  $\sqrt{6} 220 \text{ V} \approx 539 \text{ V}$ .
- Die effektive Spannung beträgt  $\frac{539 \text{ V}}{\sqrt{2}} \approx 381 \text{ V}$ .
- Wir können dies auch mit 220 V ausdrücken ...

$$U_{\text{eff}} = \frac{\sqrt{6} 220 \text{ V}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} 220 \text{ V} \approx 381 \text{ V}$$

## Motor

Beim Generator wird mechanische Energie in elektrische Energie umgewandelt.

Beim Motor ist es genau umgekehrt: elektrische Energie wird in mechanische Energie umgewandelt. Der Generator muss einfach rückwärts betrieben werden.

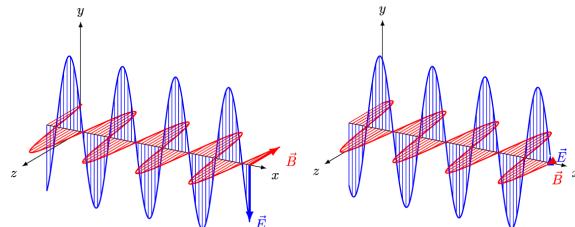
Es gibt viele verschiedene Arten von Motoren. Alle funktionieren auf Grund des Induktionsgesetzes.

Wir werden im Rahmen dieses Skripts nicht weiter darauf eingehen. Unter Link kann eine ausführliche Zusammenstellung gefunden werden.

# Elektromagnetische Schwingungen und Wellen

## Elektromagnetische Wellen

Eine **elektromagnetische Welle** (Link) ist eine Welle aus gekoppelten elektrischen und magnetischen Feldern, die sich im Raum ausbreiten und mit der gleichen Frequenz schwingen.



**Abbildung** Zwei Schnappschüsse bei der Ausbreitung einer linear polarisierten elektromagnetischen Welle. Eine Animation der Fortbewegung befindet sich unter Link.

### Bemerkungen

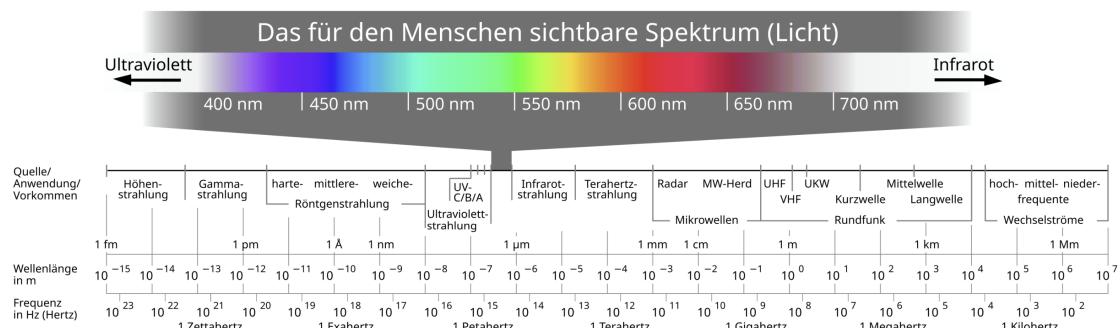
- Die Vektoren des elektrischen Feldes und des magnetischen Feldes stehen senkrecht aufeinander und auch senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung.
- Die Richtung des elektrischen Feldstärkevektors bestimmt die Richtung der Polarisation.
- Die elektromagnetischen Wellen brauchen kein Medium, um sich auszubreiten (im Gegensatz zu akustischen Wellen).
- Sie breiten sich im Vakuum mit Lichtgeschwindigkeit aus.
- Den mit der Welle verbundenen Energietransport bezeichnet man als elektromagnetische Strahlung, und der Energietransport wird mit Hilfe des **Poynting-Vektor**  $\vec{S}$  (Intensität bzw. Leistung/Fläche) beschrieben ...

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad [S] = \frac{J}{m^2 s} = \frac{W}{m^2} = \frac{N}{m s}$$

- Beispiele für elektromagnetische Wellen sind Radiowellen, Mikrowellen, Infrarotstrahlung, Licht, Röntgenstrahlung und Gammastrahlung (siehe auch e.m. Spektrum weiter unten).
- Die Wechselwirkung elektromagnetischer Wellen mit Materie hängt von der Wellenlänge ab. Ein Festkörper kann beispielsweise bei einer Frequenz durchsichtig sein, während er bei einer anderen Frequenz undurchsichtig ist.

## Elektromagnetisches Spektrum

Die elektromagnetischen Wellen (Link) umfassen einen sehr grossen Frequenz- und Wellenlängenbereich. Für bestimmte Frequenzbereiche werden unterschiedliche Namen gebraucht.



**Abbildung** Übersicht über das elektromagnetische Spektrum

# Anhang

# Anhang A

# Quellen

## Übersicht über die haupsächlichen Quellen

Die wichtigsten Quellen zur Erstellung dieses Skripts waren ...

- H. Kuchling, “**Taschenbuch der Physik**”, 2022 (22. Auflage), 714 Seiten  
Die relevanten Abschnitte zur Elektrizitätslehre sind weiter unten aufgeführt
- Helmut Hilscher (Herausgeber), “**Physikalische Freihandexperimente** - Band 2 - Akustik, Wärme, Elektrizität, Magnetismus, Optik”, 2018 (5. Auflage), 925 Seiten
- Norbert Marxer, “**Physik Merkhilfe**”, 2025, 55 Seiten (Link)  
Die relevanten Abschnitte zur Elektrizitätslehre werden weiter unten aufgeführt.
- **Wikipedia** (deutsch und englisch)  
Die entsprechenden Links wurden direkt im Text integriert

### H. Kuchling, “Taschenbuch der Physik”, 2022 (22. Auflage), 714 Seiten

Der für das Kapitel “Elektrizitätslehre” relevante Teil sind die folgenden Kapitel im Kuchling.

Kapitel 28	Gleichstromkreis	Seite 419 - 433
28.1	Elektrischer Strom	
28.2	Elektrische Spannung	
28.3	Elektrischer Widerstand	
28.4	Elektrischer Stromkreis	
28.5	Stromverzweigung	
28.6	Schaltung von Widerständen	
28.7	Messung von Stromstärke und Spannung	
28.8	Elektrische Arbeit und Leistung	
Kapitel 29	Elektrisches Feld	Seite 434 - 450
29.1	Elektrische Ladung	
29.2	Elektrische Feldstärke	
29.3	Kapazität	
29.4	Kraft und Energie im elektrischen Feld	
Kapitel 30	Magnetisches Feld	Seite 451 - 477
30.1	Dauermagnetismus (permanenter Magnetismus)	
30.2	Elektromagnetismus	
30.3	Elektromagnetische Induktion	
30.4	Kraft und Energie im magnetischen Feld	

Kapitel 31	Elektrische Maschinen	Seite 478 - 484
31.1	Generatoren	
31.2	Motoren	
Kapitel 32	Wechselstromkreis	Seite 485 - 497
32.1	Effektivwerte von Strom und Spannung	
32.2	Wechselstromwiderstand	
32.3	Wechselstromleistung	
Kapitel 33	Elektrische Leitung	Seite 498 - 529
33.1	Stromleitung durch Festkörper	
33.2	Stromleitung in Flüssigkeiten	
33.3	Stromleitung in Gasen	
33.4	Stromleitung im Vakuum	
Kapitel 34	Elektrische Schwingungen und Wellen	Seite 530 - 539
34.1	Elektromagnetische Schwingungen	
34.2	Elektromagnetische Wellen	

### N. Marxer, "Physik Merkhilfe", 2019, 55 Seiten

Auf den folgenden Seiten können die relevanten Inhalte zum Kapitel "Elektrizitätslehre" gefunden werden ...

Seite 39	Stromkreis
Seite 40	Elektrisches Feld
Seite 42	Magnetfeld
Seite 44	Übersicht zu Größen des elektrischen und magnetischen Feldes

# Anhang B      Experimente

Es gibt sehr viele Experimente zu Magnetismus und Elektrizität.

- Das Buch "Physikalische Freihandexperimente - Band 2", koordiniert von Helmut Hilscher und herausgegeben vom Aulis Verlag führt ...
  - 36 Freihandexperimente zur Elektrizität und
  - 29 Freihandexperimente zum Magnetismus auf
- Das Buch "Experimente mit Spass - Magnetismus & Elektrizität" von Werner Rentsch und herausgegeben vom Aulis Verlag Deubner führt ...
  - 123 Experimente zu Magnetismus und Elektrizität auf.

Eine schöne (einfach zugängliche) Übersicht über Freihandexperimente befindet sich auch in der Arbeit "Freihandversuche aus Elektrizitätslehre und Magnetismus" von Daniel-Markus Steger (pdf).

Es macht deshalb keinen Sinn, hier das Rad neu zu erfinden. Ich möchte in diesem Anhang nur einige wenige interessante Experimente (mit einfach zugänglichen Quellen) erwähnen.

Am Schluss dieses Anhangs erläutere ich auch noch ein einfaches, aber sinnvolles Messgerät für diesen Bereich.

## Statische Elektrizität

### Eigenschaften der statischen Elektrizität

Statische Elektrizität entsteht, wenn elektrische Ladungen durch Reibung, Kontakt oder Influenz getrennt werden und mangels Leitfähigkeit nicht sofort abfließen können. Sie ist also das Ergebnis eines Ladungsungleichgewichts, das zeitlich bestehen bleibt.



**Abbildung**    Statische Elektrizität

Typische Situationen, in denen statische Elektrizität entsteht sind ...

- Reibung (Tribolektrischer Effekt)\*\*
- Beim Reiben zweier unterschiedlicher Materialien werden Elektronen übertragen. Beispiele ...
  - Luftballon an Wolle
  - Schuhe auf Teppich
  - Kunststoffstab an trockenem Tuch
- Ein Körper wird negativ, der andere positiv geladen.

- Kontakt und Trennung (Kontaktelektrisierung)
  - Zwei Materialien kommen in Kontakt, Ladungen gleichen sich teilweise aus.
  - Beim anschließenden Trennen bleibt eine ungleiche Ladungsverteilung zurück.
  - Wichtig z. B. bei Förderbändern, Kunststofffolien, Industrieprozessen.
- Influenz (elektrostatische Induktion)
  - Ein geladener Körper bringt in einem anderen Körper eine Ladungsverschiebung hervor, ohne ihn zu berühren.
  - Beispiel: Annäherung eines geladenen Stabes an einen Metallkörper.

Bedingungen, die statische Elektrizität begünstigen sind ...

- Trockene Luft (geringe Luftfeuchtigkeit)
- Isolierende Materialien (Kunststoffe, Gummi, Glas)
- Geringe Leitfähigkeit zur Erde (isiolierte Personen, Schuhe mit Kunststoffsohlen)

weil in diesen Situationen die Ladungen schlechter abfließen.

In leitenden Materialien verschwindet statische Elektrizität meist schnell, da die Ladungen sich verteilen oder zur Erde abfließen. Entladungen statischer Elektrizität erfolgen meist plötzlich als Funke oder Schlag. Beispiele ...

- kleiner Schlag an der Türklinke
- Blitz

## Aber wie funktioniert das alles genau?

Ein sehr interessanter Artikel zur statischen Elektrizität erschien am 1. Juli 2025 in der Zeitschrift "New Scientist". Der Artikel (Link) hatte den Titel "Solving the 250-year-old puzzle of how static electricity works" und wurde von Elise Cutts geschrieben.

Das 250-jährige Puzzle wurde zwar nicht gelöst. Aber es wurde ein wichtiger Schritt vorwärts gemacht: Die Schlussfolgerung ist, dass die Kontakt Elektrifizierung (engl. contact electrification), die besagt welche Ladungen transferiert und wie sie transferiert werden, abhängig von der Vorgeschichte des Materials ist. Mit dieser Erkenntnis kann nun das Phänomen der Kontakt Elektrifizierung gezielter angegangen werden.

Es ist aber schon erstaunlich (in den Worten von Scott Waitukaitis, einem Forscher, der am Bericht beteiligt war):

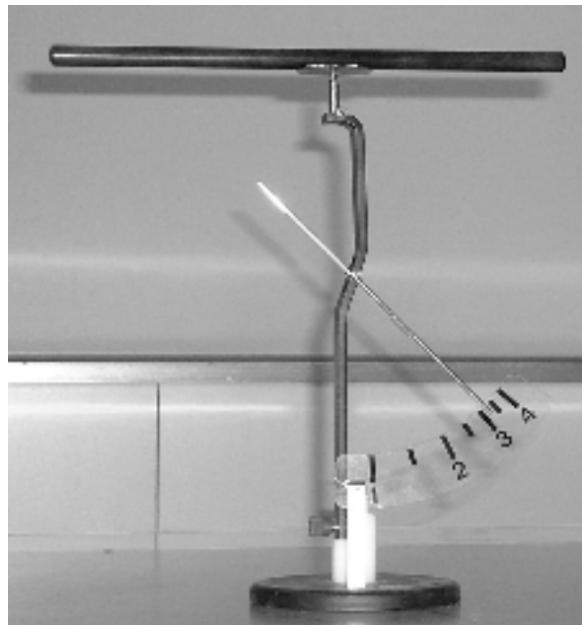
"It's so juicy. You can have large hadron colliders and you can have quantum computers, but you can't understand why a balloon rubbed on hair makes it stick," he says. "The deeper we get, the more mysterious it becomes, the harder it becomes. And that makes you want it more."

Siehe auch: [Link](#)

## Elektroskop

Ein **Elektroskop** ist ein einfaches Messgerät, mit dem man elektrische Ladung und deren Vorzeichen nachweisen kann. Es nutzt ausschließlich die elektrostatische Abstossung gleichnamiger Ladungen.

Ein Elektroskop mit kalibrierter Skala nennt man auch **Elektrometer**.



**Abbildung** Elektrometer (Link)

## Aufbau und Funktionsweise

### 1. Aufbau eines klassischen Elektroskops

Ein typisches Goldblatt-Elektroskop besteht aus ...

- einer Metallkugel oder -platte oben (Auffänger),
- einem leitenden Metallstab,
- zwei sehr dünnen Metallblättchen (Gold- oder Aluminiumfolie),
- einem isolierenden Gehäuse (meist Glas),
- einer isolierenden Durchführung am oberen Ende.

Alle metallischen Teile im Inneren sind leitend miteinander verbunden.

### 2. Grundprinzip

- Gleichnamige elektrische Ladungen stoßen sich ab.
- Wenn sich auf den Blättchen gleichartige Ladungen befinden, spreizen sie sich.
- Je größer die Ladung, desto stärker ist die Spreizung.

### 3. Funktionsweise Schritt für Schritt

#### a) Ungeladenes Elektroskop

- Alle Teile sind elektrisch neutral.
- Die Blättchen hängen dicht nebeneinander.

#### b) Aufladung durch Berührung (Kontakt)

- Ein geladener Körper berührt die Metallkugel.
- Elektronen fließen zwischen Körper und Elektroskop.
- Das Elektroskop erhält eine Nettoladung.
- Diese verteilt sich über alle Metallteile.
- Beide Blättchen tragen nun gleichnamige Ladung und stoßen sich ab.

Das Elektroskop zeigt Ladung an.

#### c) Aufladung durch Influenz (ohne Berührung)

- Ein geladener Körper wird genähert, ohne zu berühren.
- Die freien Elektronen im Elektroskop verschieben sich ...
  - bei negativem Stab: Elektronen werden nach unten gedrängt,
  - bei positivem Stab: Elektronen werden nach oben gezogen.
- Die Blättchen erhalten gleichnamige Ladungen → Spreizung.

Ladungsnachweis ohne Kontakt.

### 4. Bestimmung des Vorzeichens der Ladung

Das Elektroskop kann auch das Vorzeichen einer Ladung anzeigen.

- Elektroskop wird vorgeladen (z. B. positiv, mit Materialien, bei denen bekannt ist, welches beim Reiben positiv oder negativ aufgeladen wird).
- Ein unbekannter geladener Körper wird genähert ...
  - größere Spreizung → gleiche Ladung,
  - geringere Spreizung → entgegengesetzte Ladung.

### 5. Warum spreizen sich die Blättchen?

Beide Blättchen tragen gleiche Ladung.

Coulombsche Abstoßung wirkt stärker als ...

- Gewicht der Blättchen und
- elastische Rückstellkräfte.

Das Gleichgewicht bestimmt den Öffnungswinkel.

### 6. Rolle der Isolation

Das Elektroskop muss elektrisch isoliert sein. Sonst würde die Ladung sofort zur Erde abfließen. Hohe Luftfeuchtigkeit verschlechtert die Funktion, da Luft leitfähiger wird.

## 7. Physik auf mikroskopischer Ebene

In Metallen sind Elektronen frei beweglich.

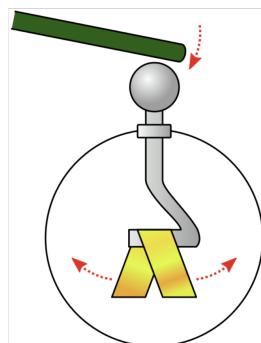
- Sie verteilen sich so, dass das elektrische Potential überall gleich ist.
- Die Ladung sitzt überwiegend auf den Oberflächen.

## 8. Kurzfassung (Merksatz)

Ein Elektroskop zeigt elektrische Ladung an, indem gleichnamig geladene Metallteile sich aufgrund der elektrostatischen Abstossung auseinander bewegen.

### Elektroskop im Eigenbau

Wir können ein einfaches Elektroskop auch selber bauen



**Abbildung** Elektroskop im Eigenbau (Link)

Diese auch Blättchenelektroskop genannte Bauform besteht ...

- aus einem gefalteten Folien-Streifen, der über einem Drahtbügel aufgehängt ist.
- Die Folie besteht aus einem leitenden Material: beispielsweise Aluminium.
- Der Bügel und die Folie sind idealerweise gegenüber der Umgebung abgeschirmt.
- Eine Kugel dient zur Aufladung des Elektroskops.

Das Elektroskop wird folgendermassen verwendet ...

- Durch Reibung wird ein Stab elektrisch aufgeladen.
- Die Annäherung des geladenen Stabes zur Kugel des Elektroskops führt zu einer Spreizung der beiden Folien.
- Wenn der Stab wieder entfernt wird, geht der Ausschlag wieder zurück.
- Die Ladungen können auch abgestreift werden.
- Dadurch bleibt die Aufspreizung dauerhaft bzw. länger (da in der Regel ein Ladungsaustausch über die Luft stattfindet).

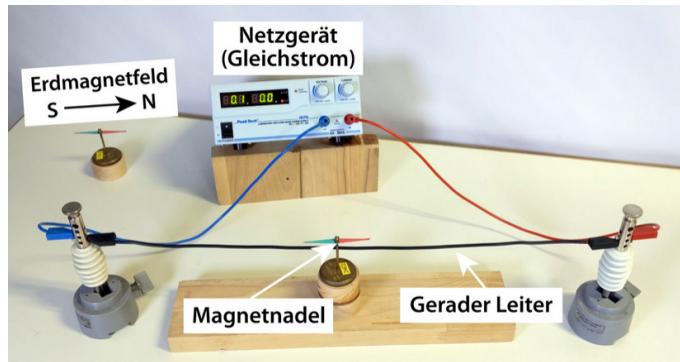
## Ørsted Versuch

Ein wichtiges Experiment ist auch der Ørsted Versuch. Mit ihm zeigte Hans Christian Ørsted im Jahre 1820, dass ein elektrischer Strom eine Magnettadel ablenkt.

Dieses Experiment zeigte erstmals eindeutig, dass Strom (Elektrizität) magnetische Wirkungen hervorruft.

Dies kann auch selber durchgeführt werden. Eine ausführliche Beschreibung findet man ...

- bei leifiphysik (Link)
- und ein Video auf Youtube (Link).

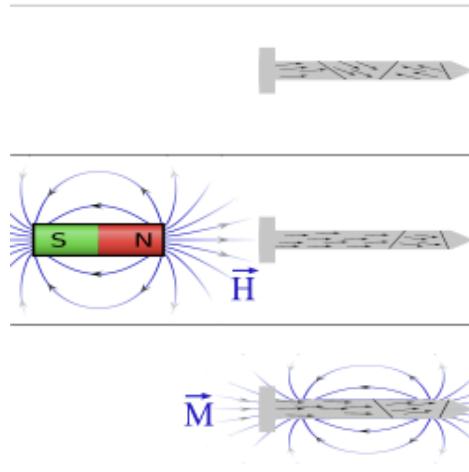


**Abbildung** Ørsted Versuch gemäss leifiphysik

## Magnetisierung eines Nagels

Ein Nagel aus Eisen kann mit Hilfe eines Permanentmagneten oder einer Spule magnetisiert werden.

### Mit Hilfe eines Permanentmagneten



**Abbildung** Magnetisierung eines Nagels (Link)

Durch Hämmern oder Erhitzen kann der Nagel entmagnetisiert werden.

Aus Wikipedia.

*Ein Nagel aus Eisen, dessen magnetische Domänen anfänglich zufällige Richtungen haben, kann durch ein äusseres Feld magnetisiert werden. Dabei ändern Domänen ihre Richtung und manche Domänen vergrössern sich auf Kosten benachbarter Domänen. Insgesamt ergibt dies eine Magnetisierung, die ungefähr parallel zum äusseren Feld verläuft. Diese Umlagerung der magnetischen Domänen kann z. B. durch externe Stöße oder Vibrationen erleichtert werden. Aufgrund der ferromagnetischen Eigenschaften behält der Nagel seine Magnetisierung teilweise auch noch nach Entfernen des äusseren Feldes bei.*

### Mit Hilfe einer Spule



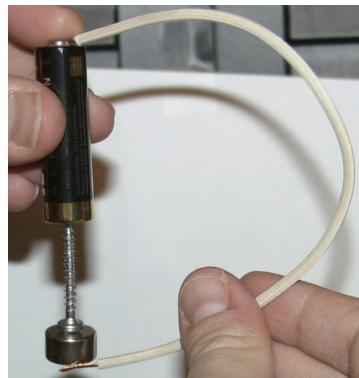
**Abbildung** Ein hausgemachter Elektromagnet (Link)

Hier wird ein Nagel mit Hilfe einer Spule magnetisiert.

Der Nagel dient einerseits zur Führung der Spule und andererseits zur Verstärkung des Magnetfelds.

## Elektromotor

Ein elektrischer Motor kann auf sehr einfache Art gebaut werden.



**Abbildung** Motor mit drehendem Magnet (Link)

Das benötigte Material ...

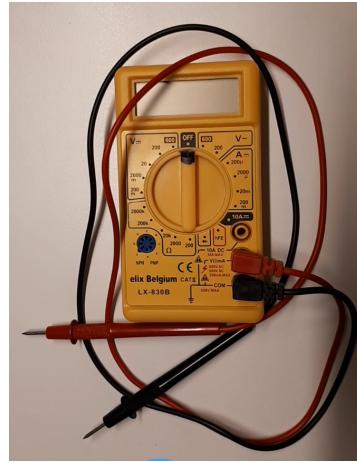
- Eisenschraube (1x)
- Alkalibatterie (1x)
- abisolierter Kupferlitze (1x)
- Scheibenmagnet (1x)

Aus [www.supermagnete.de](http://www.supermagnete.de):

*In der Zeitschrift Physik in unserer Zeit wurde ein Experiment beschrieben, das uns bei supermagnete.de völlig verblüfft hat. Der Faszination unserer Magnete waren wir ja schon längst erlegen, aber dass es mit einem unserer Magnete und nur 3 weiteren Bestandteilen bereits möglich sein sollte, einen kleinen Elektromotor (Homopolarmotor) zu bauen, war doch nahezu unglaublich. Nur 5 Minuten später hatten wir aber bereits den Motor nachgebaut und konnten nicht mehr damit aufhören, den Magneten rotieren zu lassen. Ein unglaubliches Phänomen!*

## Messgerät

Ein Gerät zur Messung von elektrischen Größen kann schon für wenig Geld (unter 15 CHF) erstanden werden.



**Abbildung** Einfaches Digitalmultimeter

Mit diesem Digitalmultimeter können ...

- Gleichspannungen und Wechselspannungen
- Gleichströme und Wechselströme
- Ohm'sche Widerstände
- Dioden und Transistoren

gemessen werden.

## 1. Einleitung

Die **klassische Elektrodynamik** zählt zu den bedeutendsten und vollständigsten Theorien der Physik. Sie beschreibt das Zusammenspiel von elektrischen und magnetischen Feldern sowie deren Wirkung auf geladene Teilchen. Ihre Entwicklung erstreckte sich über fast drei Jahrhunderte und führte zu einer der ersten grossen „vereinheitlichten“ Theorien der Naturwissenschaft. Sie bildet bis heute die Grundlage zahlreicher Technologien – von elektrischen Motoren über Funk und Lichttechnik bis hin zu Computern und Energienetzen. Der Weg zu dieser Theorie war jedoch kein gradliniger. Er begann mit ersten Beobachtungen von Elektrizität und Magnetismus in der Antike und kulminierte schliesslich im 19. Jahrhundert in James Clerk Maxwells berühmten Gleichungen.

## 2. Frühgeschichte: Von antiken Kenntnissen bis zum 17. Jahrhundert

Bereits die Griechen kannten einfache elektrische Erscheinungen. **Thales** von Milet beschrieb im 6. Jahrhundert v. Chr., wie durch Reiben von Bernstein leichte Objekte angezogen wurden – ein Hinweis auf elektrische Aufladung. Ebenso waren der Magnetstein und seine Kräfte bekannt. Doch fehlten theoretische Modelle oder systematische Untersuchungen.

Erst im Mittelalter und der frühen Neuzeit wurden Magnetismus und Elektrizität erneut Gegenstand naturwissenschaftlicher Forschung. Ein entscheidender Schritt gelang William **Gilbert** (1544–1603). In seinem Werk *De Magnete* zeigte er, dass die Erde selbst ein Magnet ist und entwickelte ein erstes kohärentes Verständnis magnetischer Felder. Gilbert gilt deshalb als Begründer der experimentellen Magnetismusforschung.

Dennoch blieb Elektrizität bis ins 17. Jahrhundert hinein eine Kuriosität: Funken, glühende Erscheinungen oder die Tierstrom-Debatte bei Zitterfischen faszinierten, doch existierte noch keine physikalische Systematik.

## 3. Elektrizität und Magnetismus im 18. Jahrhundert

Das 18. Jahrhundert brachte die entscheidenden Schritte zur Quantifizierung elektrischer Erscheinungen. Experimente mit Reibungselektrizität führten zur Konstruktion früher elektrostatischer Generatoren und Leidener Flaschen, der ersten Kondensatoren.

Wichtige Beiträge leisteten u. a.:

- Charles-Augustin de **Coulomb** (1736–1806) mit dem Coulombschen Gesetz, das die Kraft zwischen Punktladungen beschreibt und dem elektrischen Feldbegriff mathematische Präzision gab.
- Benjamin **Franklin** (1706–1790), der den Begriff „positiv/negativ“ für Ladungen einführte und die Ein-Fluid-Theorie der Elektrizität prägte.
- Luigi **Galvani** (1737–1798) und Alessandro **Volta** (1745–1827): Galvani entdeckte die „tierische Elektrizität“, Volta zeigte, dass es sich um ein elektrochemisches Phänomen handelt, und erfand die Voltasche Säule – die erste Batterie.

Diese Entwicklungen markierten den Übergang von elektrostatischen Experimenten hin zu einer kontinuierlichen elektrischen Stromquelle. Trotz grosser Fortschritte blieben Elektrizität und Magnetismus jedoch noch weitgehend unabhängige Forschungsgebiete.

## 4. Der Beginn der modernen Elektrodynamik: Ørsted, Ampère und Faraday

Der Wendepunkt kam im Jahr 1820, als Hans Christian **Ørsted** zufällig entdeckte, dass ein elektrischer Strom eine Magnetnadel ablenkt. Dieses Experiment zeigte erstmals eindeutig, dass Strom (Elektrizität) magnetische Wirkungen hervorruft.

Nur wenige Monate später entwickelte André-Marie **Ampère** eine mathematische Theorie, die den Zusammenhang zwischen Strom und magnetischen Kräften beschrieb. Die Ampèreschen Gesetze formten den Grundstein der Elektrodynamik.

Michael **Faraday** (1791–1867) schliesslich revolutionierte das Gebiet vollständig. Er entdeckte ...

- die elektromagnetische Induktion (1831),
- die Funktionsweise des Generators,
- das Prinzip des Transformators,
- und formte das moderne Konzept des Feldes.

Faradys Feldlinienmodell war zunächst eher qualitativ, doch es inspirierte James Clerk Maxwell zu seiner mathematischen Theorie. Faraday gilt daher als „der experimentelle Vater“ der Elektrodynamik.

## 5. Maxwells Revolution: Die Vereinigung von Elektrizität, Magnetismus und Licht

James Clerk **Maxwell** (1831–1879) schuf eine der grossen wissenschaftlichen Leistungen der Menschheitsgeschichte. In mehreren Arbeiten zwischen 1861 und 1865 formalisierte er Faradays Feldideen mathematisch und entwickelte die vier Maxwellschen Gleichungen, die bis heute das Fundament der klassischen Elektrodynamik bilden.

Die wesentlichen Ergebnisse ...

- Elektrische und magnetische Felder sind nicht getrennt, sondern zwei Aspekte eines einheitlichen elektromagnetischen Feldes.
- Änderungen elektrischer Felder erzeugen magnetische Felder – und umgekehrt.
- Die Gleichungen sagen die Existenz elektromagnetischer Wellen voraus, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten.
- Licht ist selbst eine elektromagnetische Welle.

Damit wurde erstmals eine physikalische Theorie geschaffen, die zwei vormals unabhängige Naturphänomene (Elektrizität, Magnetismus) vereinte. Diese Erkenntnis war ebenso tiefgreifend wie die Newtonsche Mechanik oder später die Relativitätstheorie.

## 6. Die Bestätigung elektromagnetischer Wellen: Hertz und die Geburtsstunde der Funktechnik

Heinrich **Hertz** (1857–1894) wies 1886–1889 experimentell nach, dass elektromagnetische Wellen existieren und sich genauso verhalten wie Licht. Seine Funkenstrecken-Experimente bestätigten Maxwell vollständig.

Dies war nicht nur ein Triumph der Theorie, sondern bereitete den Weg für die moderne Kommunikationstechnologie. Bereits wenige Jahre später begann Guglielmo Marconi mit den ersten Funkübertragungen.

## 7. Mathematische Struktur der Maxwellschen Theorie

Die Maxwellschen Gleichungen beschreiben ...

- das Gauss'sche Gesetz der Elektrizität,
- das Gauss'sche Gesetz des Magnetismus,
- das Faradaysche Induktionsgesetz und
- das Ampère-Maxwell-Gesetz.

Zusammen mit der Lorentzkraft ergeben sie eine vollständige Beschreibung ...

- wie Ladungen Felder erzeugen,
- wie Felder auf geladene Teilchen wirken und
- wie sich Felder im Raum ausbreiten.

Die mathematische Eleganz dieser Theorie war so überzeugend, dass sie oft als „die schönste Theorie der klassischen Physik“ bezeichnet wird.

## 8. Die klassische Elektrodynamik und die Relativitätstheorie

Ende des 19. Jahrhunderts zeigten Experimente wie das von Michelson-Morley, dass weder ein Äther existiert noch die Lichtgeschwindigkeit von der Bewegung der Quelle abhängt.

Diese Erkenntnisse und Widersprüche führten Albert Einstein 1905 zur Speziellen Relativitätstheorie, deren Ausgangspunkt die Maxwellsche Theorie war. Die Elektrodynamik bleibt vollständig gültig, doch sie ist nicht kompatibel mit der klassischen Newtonschen Mechanik.

Damit bildet die klassische Elektrodynamik eine Brücke zwischen klassischer Physik und moderner Physik.

## 9. Technologische Folgen der Elektrodynamik

Ohne die klassische Elektrodynamik gäbe es keine ...

- Elektrizitätsnetze,
- Generatoren und Motoren,
- Transformatoren,
- Radio, Radar, Mobilfunk,
- Lichttechnik und Laserphysik (Vorstufe),
- elektronische Geräte aller Art sowie
- Optik moderner Mikroskope, Teleskope etc.

Kaum ein anderer Bereich der Physik hat die moderne Welt stärker geprägt.

## 10. Abschluss

Die klassische Elektrodynamik ist ein Meilenstein der Wissenschaftsgeschichte und ein Paradebeispiel für das Zusammenspiel von Theorie und Experiment. Sie zeigt, wie schrittweise Entdeckungen – von Gilbert bis Faraday – schliesslich in der theoretischen Synthese Maxwells münden konnten. Die Eleganz und Vollständigkeit dieser Theorie machten sie zum Fundament sowohl der modernen Technologie wie auch der Relativitätstheorie.

Bis heute gilt sie als eines der schönsten Resultate der Physik.

## Anhang D

## Mathematik: Vektor Theoreme / Identitäten

## Zusammenfassung

Zur Umwandlung der Maxwell-Gleichungen von der Differentialform in die (leichter verständliche) Integralform und umgekehrt benutzen wir die folgenden Theoreme ...

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV = \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

**Gauss Theorem**

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{L}$$

**Stokes Theorem**

und die folgenden Vektor-Identitäten ...

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = \Delta \varphi$$

**div-grad = Laplace**

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = \vec{0}$$

**rot-grad = 0**

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$$

**div-rot = 0**

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \Delta \vec{F}$$

**rot-rot = grad-div minus Laplace**

## Definition und Schreibweise

Dabei gelten die folgenden Bezeichnungen bzw. Abkürzungen ...

Nabla bzw. Del Operator	$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$	Kurzschreibweise	$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$
Ableitung nach der Zeit	$\frac{\partial}{\partial t}$	Kurzschreibweise	$\partial_t$
Gradient	$\text{grad}[\varphi] = \vec{\nabla} \varphi = \begin{pmatrix} \partial_x \varphi \\ \partial_y \varphi \\ \partial_z \varphi \end{pmatrix}$		wirkt auf ein Skalarfeld
Divergenz-Operator	$\text{div}[\vec{F}] = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$		
Rotations-Operator	$\text{rot}[\vec{F}] = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix}$		
Laplace-Operator	$\Delta \vec{F} = \begin{pmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_y \\ \Delta F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$		

Der Punkt bei  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$  bedeutet Skalarprodukt.

$$\text{rot}[\vec{F}] = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix}$$

Das Kreuz bei  $\vec{\nabla} \times \vec{F}$  bedeutet Vektorprodukt.

$$\Delta \vec{F} = \begin{pmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_y \\ \Delta F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

Diese Theoreme und Identitäten werden im Folgenden erläutert. Wichtig sind vor allem ...

- das Skalarprodukt
  - das Vektorprodukt
  - die Linearität
  - die Vertauschbarkeit der Ableitungen
- z.B.  $\partial_x (\partial_y \varphi_1 + \partial_z \varphi_2) = \partial_x \partial_y \varphi_1 + \partial_x \partial_z \varphi_2$
- z.B.  $\partial_x \partial_y \varphi = \partial_y \partial_x \varphi$

## Gauss' Theorem

Für ein beliebiges Vektorfeld  $\vec{F}$  und ein beliebiges Volumen  $V$  gilt ...

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV = \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{dS}$$

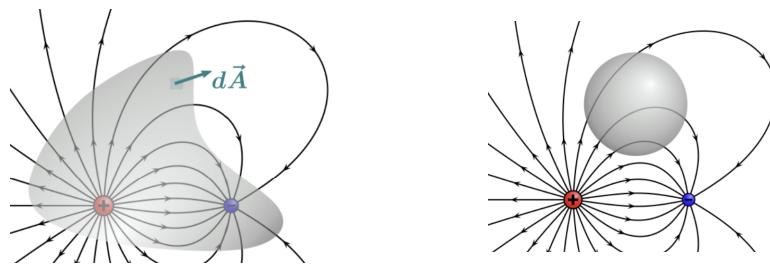
### Gauss Theorem

Das heisst, die Integration der Divergenz von  $\vec{F}$ , d.h. von  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ , über das ganze Volumen entspricht dem Integral von  $\vec{F} \cdot \vec{dS}$  über die Oberfläche des Volumens (d.h. den Rand des Volumens). Dabei gilt für  $\vec{F} \cdot \vec{dS}$  ...

$\vec{dS}$  ist ein Vektor, der senkrecht auf der Oberfläche steht und die Fläche  $dS$  hat.

$\vec{F} \cdot \vec{dS}$  ist ein Skalarprodukt. Das heisst, dass nur die Komponente von  $\vec{F}$  senkrecht zur Oberfläche betrachtet wird:  $\vec{F} \cdot \vec{dS} = F_{\text{senkrecht}} * dS$

$\oint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{dS}$  ist der Fluss aus dem Volumen



**Abbildung** Gauss Theorem (Link)

- Der elektrische Fluss durch die geschlossene Oberfläche ist proportional zur eingeschlossenen Ladung.
- Der elektrische Fluss durch die geschlossene Oberfläche ist gleich 0, da sich im eingeschlossenen Volumen keine Ladung befindet.

## Stokes Theorem

Für ein beliebiges Vektorfeld  $\vec{F}$  und eine beliebige Fläche  $S$  gilt ...

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{dS} = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{dL}$$

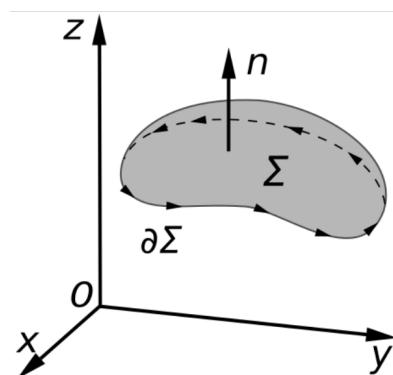
### Stokes Theorem

Das heisst, die Integration des Flusses der Rotation von  $\vec{F}$  (d.h. von  $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ ) über die ganze Fläche  $S$  entspricht dem Linienintegral von  $\vec{F} \cdot \vec{dL}$  entlang des Rands der Fläche  $\partial S$ . Dabei gilt für  $\vec{F} \cdot \vec{dL}$  ...

$\vec{dL}$  ist ein Vektor, der parallel zum Rand der Fläche und die Länge  $dL$  hat.

$\vec{F} \cdot \vec{dL}$  ist ein Skalarprodukt. Das heisst, dass nur die Komponente von  $\vec{F}$  parallel zur Linie betrachtet wird:  $\vec{F} \cdot \vec{dL} = F_{\text{parallel}} * dL$

$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{dL}$  ist das Linienintegral entlang des Rands der Fläche.



**Abbildung** Stokes Theorem (Link).  $\Sigma$  steht hier für die Fläche  $S$

$$\operatorname{div}[\operatorname{grad}[\varphi]] = \Delta\varphi \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = \Delta\varphi$$

Die Operatoren haben die folgende Wirkung ...

- Der Operator **grad** wirkt auf ein Skalarfeld und gibt ein Vektorfeld zurück.
- Der Operator **div** wirkt auf ein Vektorfeld und gibt ein Skalarfeld zurück.

Rechnerisch ergibt  $\operatorname{div}[\operatorname{grad}[\varphi]]$  ...

$$\operatorname{div}[\operatorname{grad}[\varphi]] = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x \varphi \\ \partial_y \varphi \\ \partial_z \varphi \end{pmatrix} = \partial_x \partial_x \varphi + \partial_y \partial_y \varphi + \partial_z \partial_z \varphi = \Delta\varphi$$

$$\operatorname{rot}[\operatorname{grad}[\varphi]] = \vec{0} \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = \vec{0}$$

Die Operatoren haben die folgende Wirkung ...

- Der Operator **grad** wirkt auf ein Skalarfeld und gibt ein Vektorfeld zurück.
- Der Operator **rot** wirkt auf ein Vektorfeld und gibt ein Vektorfeld zurück.

Rechnerisch ergibt  $\operatorname{rot}[\operatorname{grad}[\varphi]]$  ...

$$\operatorname{rot}[\operatorname{grad}[\varphi]] = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_x \varphi \\ \partial_y \varphi \\ \partial_z \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y \partial_z \varphi - \partial_z \partial_y \varphi \\ \partial_z \partial_x \varphi - \partial_x \partial_z \varphi \\ \partial_x \partial_y \varphi - \partial_y \partial_x \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\operatorname{div}[\operatorname{rot}[\vec{F}]] = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$$

Die Operatoren haben die folgende Wirkung ...

- Der Operator **rot** wirkt auf ein Vektorfeld und gibt ein Vektorfeld zurück.
- Der Operator **div** wirkt auf ein Vektorfeld und gibt ein Skalarfeld zurück.

Rechnerisch ergibt  $\operatorname{div}[\operatorname{rot}[\vec{F}]]$  ...

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\operatorname{rot}[\vec{F}]] &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix} \\ &= \partial_x (\partial_y F_z - \partial_z F_y) + \partial_y (\partial_z F_x - \partial_x F_z) + \partial_z (\partial_x F_y - \partial_y F_x) \\ &= \color{blue} \partial_x \partial_y F_z - \partial_x \partial_z F_y + \color{magenta} \partial_y \partial_z F_x - \partial_y \partial_x F_z + \color{pink} \partial_z \partial_x F_y - \partial_z \partial_y F_x \\ &\stackrel{*}{=} 0 \end{aligned}$$

\* Wir dürfen die Ableitungen vertauschen

$$\operatorname{rot}[\operatorname{rot}[\vec{F}]] = \operatorname{grad}[\operatorname{div}[\vec{F}]] - \text{Laplace} \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \Delta \vec{F}$$

Die Operatoren haben die folgende Wirkung ...

- Der Operator **rot** wirkt auf ein Vektorfeld und gibt ein Vektorfeld zurück.
- Der Operator **div** wirkt auf ein Vektorfeld und gibt ein Skalarfeld zurück.
- Der Operator **grad** wirkt auf ein Skalarfeld und gibt ein Vektorfeld zurück.
- Der Operator Laplace wirkt auf ein Skalarfeld (oder bei Vektorfeld auf alle Komponenten).

Zunächst berechnen wir  $\operatorname{grad}[\operatorname{div}[\vec{F}]]$

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}[\operatorname{div}[\vec{F}]] &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} (\partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z) \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x (\partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z) \\ \partial_y (\partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z) \\ \partial_z (\partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \partial_x F_x + \partial_x \partial_y F_y + \partial_x \partial_z F_z \\ \partial_y \partial_x F_x + \partial_y \partial_y F_y + \partial_y \partial_z F_z \\ \partial_z \partial_x F_x + \partial_z \partial_y F_y + \partial_z \partial_z F_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dann  $\operatorname{rot}[\operatorname{rot}[\vec{F}]]$  ...

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}[\operatorname{rot}[\vec{F}]] &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \left( \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y (\partial_x F_y - \partial_y F_x) - \partial_z (\partial_z F_x - \partial_x F_z) \\ \partial_z (\partial_y F_z - \partial_z F_y) - \partial_x (\partial_x F_y - \partial_y F_x) \\ \partial_x (\partial_z F_x - \partial_x F_z) - \partial_y (\partial_y F_z - \partial_z F_y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_y \partial_x F_y - \partial_y \partial_y F_x - \partial_z \partial_z F_x + \partial_z \partial_x F_z \\ \partial_z \partial_y F_z - \partial_z \partial_z F_y - \partial_x \partial_x F_y + \partial_x \partial_y F_x \\ \partial_x \partial_z F_x - \partial_x \partial_x F_z - \partial_y \partial_y F_z + \partial_y \partial_z F_y \end{pmatrix} \\ &\stackrel{*}{=} \begin{pmatrix} \partial_y \partial_x F_y + \partial_z \partial_x F_z + \partial_x \partial_x F_x - \partial_y \partial_y F_x - \partial_z \partial_z F_x - \partial_x \partial_x F_x \\ \partial_z \partial_y F_z + \partial_x \partial_y F_x + \partial_y \partial_y F_y - \partial_z \partial_z F_y - \partial_x \partial_x F_y - \partial_y \partial_y F_y \\ \partial_x \partial_z F_x + \partial_y \partial_z F_y + \partial_z \partial_z F_z - \partial_x \partial_x F_z - \partial_y \partial_y F_z - \partial_z \partial_z F_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_y \partial_x F_y + \partial_z \partial_x F_z + \partial_x \partial_x F_x - \partial_y \partial_y F_x - \partial_z \partial_z F_x - \partial_x \partial_x F_x \\ \partial_z \partial_y F_z + \partial_x \partial_y F_x + \partial_y \partial_y F_y - \partial_z \partial_z F_y - \partial_x \partial_x F_y - \partial_y \partial_y F_y \\ \partial_x \partial_z F_x + \partial_y \partial_z F_y + \partial_z \partial_z F_z - \partial_x \partial_x F_z - \partial_y \partial_y F_z - \partial_z \partial_z F_z \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{siehe oben}}{=} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \begin{pmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_y \\ \Delta F_z \end{pmatrix} \\ &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \Delta \vec{F} \end{aligned}$$

\* Trick: wir addieren 0 (d.h. addieren und subtrahieren das Gleiche)